Programme des colles de mathématiques en PC*3

Semaine n°13   du lundi 20 janvier au vendredi 24 janvier

Suites de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme. La convergence uniforme implique la convergence simple.

Théorème d'interversion des limites (preuve non exigible comme question de cours)

Une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $I=[a,b]$, alors $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\ dt=\int_a^b f(t)\ dt$.

Dérivabilité d'une limite de fonctions de classe C^1 : hypothèse de convergence uniforme sur la suite des dérivées.

Extension aux cas des suites de fonctions de classe C^p ou C^∞.

Séries de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale.

La convergence normale implique la convergence uniforme.

Théorème d'interversion des limites (appelé théorème de la double limite) :

Si $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur I et si $\lim_{x\to a} f_n(x)=\lambda_n$, alors $\lim_{x\to a} S(x)$ existe et vaut $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n$.

Si $\sum f_n$ converge uniformément et si les f_n sont continues, alors $S=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue.

Intégration terme à terme d'une série de fonctions continues uniformément convergente sur un segment.

Dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe C^1 : si $\sum f_n$ converge simplement et si $\sum f_n'$ converge uniformément (sur tout segment), alors $S=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 et $S'=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Séries entières

Lemme d'Abel. Rayon de convergence d'une série entière : $R=\sup\{\rho\geq 0\mid (a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée }\}$.

Disque de convergence (cv absolue à l'intérieur, divergence en dehors).

Critère de D'Alembert pour les séries entières.

Cas des séries lacunaires $\sum a_n z^{np+r}$, avec $p\geq 2$.

Propriétés de comparaisons : Si $a_n=O(b_n)$, alors $R_a\geq R_b$. Cas $a_n=O(\lambda^n b_n)$, $a_n\sim n^\alpha b_n$.

Rayon de convergence d'une somme, de la série dérivée (formelle), de la primitive (formelle).

Produit de Cauchy de deux séries (resp. séries entières) absolument convergentes.

Convergence normale sur $D(0,r)$, avec $r<R$. Formules de Cauchy.

Séries entières d'une variable réelle. Obtention des dérivées sur l'intervalle ouvert de convergence.

Expression des coefficients en fonction des dérivées de la fonction en 0.

Fonctions développables en série entière au voisinage de 0.

Méthodes d'obtention : Taylor-Lagrange, intégration et dérivation, méthode de l'équation différentielle.

DSE des fonctions usuelles. DSE des fonctions rationnelles.

Exemples d'étude aux bords : cas de $\ln 2$ et de $\arctan 1$.

Utilisation des séries entières dans la résolution d'équations différentielles linéaires.

Utilisations des séries entières dans le calcul de sommes, en combinatoire, pour la résolution de récurrences.