Programme des colles de mathématiques en PC*3

Semaine n°12 du lundi 13 janvier au vendredi 17 janvier

Variables aléatoires à valeurs réelles discrètes

Espérance d'une variable réelle positive.

Variables d'espérance finie (= moment d'ordre 1 fini) : $\sum_{x\in X(\Omega)} |x|\, P(X=x) < +\infty$. Notation $E(X)$.

Théorème du transfert :

$f(X)$ est d'espérance finie ssi $\sum_{x\in X(\Omega)} |f(x)|\, P(X=x) < +\infty$. Alors $E(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$.

Linéarité de l'espérance sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathbb{R})$.

Théorème de comparaison et inégalité triangulaire : Si $|X| \leq Y$ d'espérance finie, alors $|E(X)| \leq E(Y)$.

Variable centrée (on a choisi dans le cours la notation : $\widehat{X} = X - \mu$, où $\mu = E(X)$).

Moments d'ordre 2, espace $\mathcal{L}^2(\Omega,\mathbb{R})$, produit-scalaire $E(XY)$, variance $V(X)$ et écart-type $\sigma(X)$.

Covariance $\mathrm{Cov}(X,Y)$, espérance et variance d'une somme ; variables non corrélées et corrélation.

Cas des variables aléatoires indépendantes. Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Variance d'une somme de variables aléatoires deux à deux indépendantes. Cas des variables aléatoires i.i.d.

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Loi faible des grands nombres : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.r. i.i.d., alors $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} P(\left|\frac{1}{n}S_n - \mu\right| \geq \varepsilon)) = 0$.

Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

- Série génératrice : $G_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Expression de l'espérance et de variance en fonction de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.

- Série génératrice d'une somme de variables mutuellement indépendantes.

La preuve de $G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z)$ n'est pas exigible (cf cours ultérieur sur les séries entières).

Lois usuelles

- Loi de Rademacher (pile ou face)

- Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in]0,1[$

- Loi binomiale : $\mathcal{B}(n,p)$, somme de n variables indépendantes de Bernoulli

- Loi géométrique (= loi du premier succès) : $\mathcal{G}(p)$: définie sur $\mathbb{N}^*$, variante définie sur $\mathbb{N}$ (nombre d'échecs)

- Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda \geq 0$; propriété fondamentale concernant la somme de deux v.a. indépendantes

Theorème des événements rares : La loi d'une somme S_n de n variables de Bernoulli de paramètre $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$ converge vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$: la preuve au programme consiste à déterminer directement la limite de $P(S_n = k)$.

Exemples simples de chaînes de Markov

- Matrice de transition : calcul de la loi de X_n en fonction de la loi de X_0.

Suites de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme. La convergence uniforme implique la convergence simple.

Théorème d'interversion des limites (preuve non exigible comme question de cours)

Une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $I=[a,b]$, alors $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\ dt=\int_a^b f(t)\ dt$.

Dérivabilité d'une limite de fonctions de classe C^1 : hypothèse de convergence uniforme sur la suite des dérivées.

Extension aux cas des suites de fonctions de classe C^p ou C^∞.

Séries de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale.

La convergence normale implique la convergence uniforme.

Théorème d'interversion des limites (appelé théorème de la double limite) :

Si $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur I et si $\lim_{x\to a} f_n(x)=\lambda_n$, alors $\lim_{x\to a} S(x)$ existe et vaut $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n$.

Si $\sum f_n$ converge uniformément et si les f_n sont continues, alors $S=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue.

Intégration terme à terme d'une série de fonctions continues uniformément convergente sur un segment.

Dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe C^1 : si $\sum f_n$ converge simplement et si $\sum f_n'$ converge uniformément (sur tout segment), alors $S=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 et $S'=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.