Programme des colles de mathématiques en PC*3

Semaine n°11   du lundi 6 janvier au vendredi 10 janvier

Isométries (= automorphismes orthogonaux) et matrices orthogonales

Définitions et caractérisations des isométries.

Matrices orthogonales. Liens avec les isométries.

Rotations ($SO(E) = O^+(E)$) et matrices de rotation ($SO_n(\mathbb{R})$).

Symétries orthogonales. Réflexions hyperplanes.

Cas de la dimension 2 : $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$.

Si F stable par $u \in O(E)$, alors $u(F) = F$ et $u(F^\perp) = F^\perp$. Exemple d'utilisation en dimension 3.

Remarque : La réduction des rotations en dimension 3 n'est plus au programme officiel.

Orientations, bases orthonormées directes.

Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

Remarque : Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$, alors $a_{ij} = \langle e_i, u(e_j)\rangle$.

Définition des endomorphismes symétriques : $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$.

Caractérisation matricielle : u symétrique ssi la matrice de u dans une (toute) BON est symétrique.

Th spectral (admis) : u est symétrique ssi u est diagonalisable dans une BON.

Corollaire : Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable et il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $U^T SU = D$.

Endomorphismes symétriques positifs et définis positifs.

Les matrices $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ sont les $A^T A$, avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Ensembles finis et dénombrables

- Définition. Exemples : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

- Familles sommables : les propriétés de commutativité, de regroupements par paquets et concernant les sommes doubles (Fubini) sont admises.

Espaces probabilisés

Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$: loi de probabilité définie sur une tribu d'événements.

Additivité (finie ou dénombrable), continuité croissante (resp. décroissante).

Exemple fondamental : loi définie sur une tribu engendrée par une partition dénombrable (d'atomes).

Définition d'une variable aléatoire (discrète) $X : \Omega \to E$ (dénombrable), loi associée à une variable aléatoire.

Couple de variables aléatoires : loi conjointe de $Z = (X, Y)$, lois marginales.

Probabilité conditionnelle : On suppose $P(B) > 0$. On définit $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, notée $P(A \mid B)$.

Formule des probabilités composées : $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$. *Formule de Bayes.*

Formule de l'intersection. $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)...P(A_n \mid A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$.

Formule des probabilités totales : Si $(B_n)_{n\in E}$ système complet de Ω, $P(A) = \sum_{n\in E} P(A \mid B_n)P(B_n)$.

Remarque : Système complet = Partition finie ou dénombrable d'événements non négligeables.

Evénements (mutuellement) indépendants.

Variables aléatoires indépendantes : $\forall(x,y)$, $P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$.

Si X et Y sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Variables (mutuellement) indépendantes : $P(X_1=x_1,...,X_n=x_n)=P(X_1=x_1)...P(X_n=x_n)$.

Cas d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables indépendantes : toute sous-famille finie est indépendante.

Variables aléatoires à valeurs réelles discrètes

Espérance d'une variable réelle positive.

Variables d'espérance finie (= moment d'ordre 1 fini) : $(xP(X=x))_{x\in\operatorname{Im}X}$ sommable. Notation $E(X)$.

Théorème du transfert :

$f(X)$ est d'espérance finie ssi $\sum_{x\in X(\Omega)}|f(x)|\,P(X=x)<+\infty$. Alors $E(f(X))=\sum_{x\in X(\Omega)}f(x)P(X=x)$.

Linéarité de l'espérance sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathbb{R})$.

Théorème de comparaison et inégalité triangulaire : Si $|X|\leq Y$ d'espérance finie, alors $|E(X)|\leq E(Y)$.

Variable centrée (on a choisi dans le cours la notation : $\widehat{X}=X-\mu$, où $\mu=E(X)$).

Moments d'ordre 2, espace $\mathcal{L}^2(\Omega,\mathbb{R})$, produit-scalaire $E(XY)$, variance $V(X)$ et écart-type $\sigma(X)$.

Covariance $\operatorname{Cov}(X,Y)$, espérance et variance d'une somme ; variables non corrélées et corrélation.

Cas des variables aléatoires indépendantes. Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY)=E(X)E(Y)$.

Variance d'une somme de variables aléatoires deux à deux indépendantes. Cas des variables aléatoires i.i.d.

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Loi faible des grands nombres : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.r. i.i.d., alors $\forall\varepsilon>0$, $\lim_{n\to+\infty}P(\left|\frac{1}{n}S_n-\mu\right|\geq\varepsilon))=0$.

Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

- Espérance : $E(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}nP(X=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X>n)$
- Série génératrice : $G_X(t)=E(t^X)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)\;t^n$.

Expressions (admises) de l'espérance et de variance en fonction de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.

- Série génératrice d'une somme de variables mutuellement indépendantes, $G_{X+Y}(z)=G_X(z)G_Y(z)$.

Lois usuelles

- Loi de Rademacher (pile ou face)
- Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $p\in]0,1[$
- Loi binomiale : $\mathcal{B}(n,p)$, somme de n variables indépendantes de Bernoulli
- Loi géométrique (= loi du premier succès) : $\mathcal{G}(p)$: définie sur $\mathbb{N}^*$, variante définie sur $\mathbb{N}$ (nombre d'échecs)
- Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda\geq 0$; propriété fondamentale concernant la somme de deux v.a. indépendantes

Theorème des événements rares : La loi d'une somme S_n de n variables de Bernoulli de paramètre $p_n\sim\frac{\lambda}{n}$ converge vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$: la preuve au programme consiste à calculer la limite de $P(S_n=k)$.