Programme des colles de mathématiques en PC*3

Semaine n°10   du lundi 09 décembre au vendredi 13 décembre

Espaces euclidiens

Produit scalaire, norme euclidienne.

Identité de polarisation, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire.

Vecteurs orthogonaux, théorème de Pythagore. Sev orthogonaux.

Espaces euclidiens :

Existence d'une base orthonormée

Théorème de représentation des formes linéaires.

Expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée.

Expression de la norme et du produit scalaire en fonction des coordonnées dans une base orthonormée.

Projection orthogonale (sur un sev de dimension finie), supplémentaire orthogonal.

Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Matrices de Gram : $M = (\langle a_i, a_j \rangle)_{1 \le i \le p, 1 \le j \le p} = A^T A$, où $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a_1, ..., a_p)$ et $\mathcal{B}$ BON ; $\mathrm{rg}(A^T A) = \mathrm{rg}\, A$.

Remarque : Les matrices de Gram vues comme matrices symétriques seront étudiées ultérieurement.

Exemple : Détermination du projeté sur un plan.

Isométries (= automorphismes orthogonaux) et matrices orthogonales **:**

Définitions et caractérisations des isométries.

Matrices orthogonales. Liens avec les isométries.

Rotations ($SO(E) = O^+(E)$) et matrices de rotation ($SO_n(\mathbb{R})$).

Symétries orthogonales. Réflexions hyperplanes.

Cas de la dimension 2 : $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$.

Si F stable par $u \in O(E)$, alors $u(F) = F$ et $u(F^\perp) = F^\perp$. Exemple d'utilisation en dimension 3.

Remarque : La réduction des rotations en dimension 3 n'est plus au programme officiel.

Orientations, bases orthonormées directes.

Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien :

Remarque : Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$, alors $a_{ij} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$.

Définition des endomorphismes symétriques : $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

Caractérisation matricielle : u symétrique ssi la matrice de u dans une (toute) BON est symétrique.

Th spectral (admis) : u est symétrique ssi u est diagonalisable dans une BON.

Corollaire : Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable et il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $U^T S U = D$.

Endomorphismes symétriques positifs et définis positifs.

Les matrices $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ sont les $A^T A$, avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Espaces probabilisés et lois

Familles sommables : les propriétés de commutativité, de regroupements par paquets et concernant les sommes doubles (Fubini) sont admises.

Exemple fondamental : loi définie sur une tribu engendrée par une partition dénombrable (d'atomes).

Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$: loi de probabilité définie sur une tribu d'événements.

Additivité (finie ou dénombrable), continuité croissante (resp. décroissante).

Probabilité conditionnelle : On suppose $P(B) > 0$. On définit $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, notée $P(A \mid B)$.

Formule des probabilités composées : $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$. *Formule de Bayes.*

Formule de l'intersection. $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)...P(A_n \mid A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$.

Formule des probabilités totales : Si $(B_n)_{n\in E}$ système complet de Ω, $P(A) = \sum_{n\in E} P(A \mid B_n)P(B_n)$.

Remarque : Système complet = Partition finie ou dénombrable d'événements non négligeables.

Définition d'une variable aléatoire (discrète) $X : \Omega \to E$ (dénombrable), loi associée à une variable aléatoire.

Couple de variables aléatoires : loi conjointe de $Z = (X, Y)$, lois marginales.

Événements (mutuellement) indépendants.

Variables aléatoires indépendantes : $\forall(x, y)$, $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

Si X et Y sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Variables (mutuellement) indépendantes : $P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)...P(X_n = x_n)$.

Cas d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables indépendantes : toute sous-famille finie est indépendante.

Attention : les v.a. réelles (espérance, variance, etc) ne sont pas au programme cette semaine.

Attention : les colles du mercredi 11 doivent être déplacées (par exemple au mercredi 18).

Attention : pas de colles la semaine du 16 au 20 décembre.

★★★ *Bonnes fêtes de fin d'année* ★★★