Programme des colles de mathématiques en PC*3

Semaine n°8   du lundi 25 novembre au vendredi 29 novembre

Révisions sur les déterminants

Nota Bene : toutes les propriétés fondamentales sont admises

Propriétés du déterminant d'une matrice :

- $\det A = \det(A_1, ..., A_n)$ est une forme n-linéaire alternée de ses vecteurs colonnes.
- Déterminant de la transposée : $\det A = \det A^T$.

Ainsi, le déterminant est une forme n-linéaire alternée de ses vecteurs lignes.

- $\det AB = (\det A)(\det B)$; $\det A \neq 0$ ssi $A \in GL_n(K)$.
- Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.
- Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes.

Cofacteurs $C_{ij} = \det(A_1, ..., A_{j-1}, E_i, A_{j+1}, ..., A_n) = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Développement du déterminant selon une ligne ou une colonne.

Le déterminant est un polynôme en les coefficients de A.

Déterminant de Van der Monde

Remarque : L'expression explicite de $\det A$ est hors-programme (comme la notion de signature).

- Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base, déterminant d'un endomorphisme.

Notions sur les formes n-linéaires alternées (= antisymétriques) sur un K-ev E de dimension n..

Droite vectorielle des formes n-linéaires alternées sur sur un K-ev E de dimension n.

$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), ..., u(x_n)) = (\det u)\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$.

- Expression de la solution d'un système $AX = B$ inversible : $x_i = \dfrac{\det(A_1, ..., A_{i-1}, B, A_{i+1}, ..., A_n)}{\det B}$.

Remarque : La notion de comatrice est hors-programme.

Réduction des endomorphismes (sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$)

Matrices semblables. Trace et déterminant.

Sous-espaces stables. Lien avec les valeurs propres (droites stables), avec les matrices compagnons, avec les matrices triangulaires supérieures.

Valeurs propres, sev propres, les sev propres sont en somme directe.

Polynôme caractéristique d'une matrice $\chi_u(x) = \det(x\,\mathrm{Id} - u)$.

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.

Comparaison entre la dimension du sous-espace propre et l'ordre de multiplicité comme racine de χ_u.

Définition d'un endomorphisme (ou d'une matrice) trigonalisable.

Condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité : Un endomorphisme est trigonalisable ssi χ_u est scindé.

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable. On a : $\chi_u(x) = x^n - x^{n-1}\operatorname{tr}(u) + \dots + (-1)^n \det u$.

Définition d'un endomorphisme (ou d'une matrice) diagonalisable.

Un endomorphisme de E est diagonalisable ssi la somme des dimensions des sev propres est $n = \dim E$.

Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité : χ_u scindé et $\dim E_{\lambda_i} = m_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

Condition suffisante de diagonalisabilité : si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable et les n sous-espaces propres sont de dimension 1.

Pratique de la diagonalisation (en explicitant la matrice de passage).

Exemple : Réduction dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: toute matrice est diagonalisable ou semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exemple : Réduction dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: toute matrice non trigonalisable est semblable à $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Polynômes d'endomorphismes et de matrices.

Exemple : Polynôme d'une matrice diagonale (utilisation de l'interpolation de Lagrange).

Polynômes annulateurs. Les valeurs propres sont DES racines de tout polynôme annulateur.

Théorème de Cayley-Hamilton (*admis*)

Un endomorphisme est diagonalisable ssi elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Projections et symétries.

Endomorphismes nilpotents (sur $\mathbb{C}$) :

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

Remarque : *La réduction de Jordan est hors-programme.*

Endomorphismes commutants :

Si $u \circ v = v \circ u$, alors les sev propres de u sont stables par v.

Calcul de A^n par différentes méthodes, essentiellement dans le cas où A est diagonaisable.

Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable.