Programme des colles de mathématiques en PC*3

Semaine n°7   du lundi 18 novembre au vendredi 22 novembre

- **Intégrales dépendant d'un paramètre**

Extension du th de convergence dominée au cas d'un paramètre continu.

Continuité des intégrales dépendant d'un paramètre.

Dérivée des intégrales dépendant d'un paramètre.

Extension aux fonctions de classe C^n (la domination porte sur la dernière dérivée) et C^∞.

- **Révisions d'algèbre linéaire**

- Combinaisons linéaires, sous-espaces vectoriels.

Sous-espace engendré par une famille de vecteurs, somme de sev

Applications linéaires, noyau et image.

- Familles génératrices, familles libres, bases.

Une famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée ssi un des vecteurs est combinaison linéaire des précédents.

- Sev en somme directe. Cas d'une somme directe de deux sev, sev supplémentaires.

Base adaptée à une décomposition en somme directe.

Définition d'une application linéaire par ses restrictions aux sev d'une décomposition en somme directe.

- Dimension : Un K-ev E est de dimension n ssi il admet une base (= est isomorphe à K^n).

Théorèmes de la base extraite et de la base incomplète.

Toute famille libre est de cardinal $\leq n = \dim E$, avec égalité ssi elle est une base.

Un sev F de E est de dimension n ssi $F = E$.

Dimension d'une somme directe, relation de Grassmann.

- Codages matriciels :

Application linéaire $u : K^p \to K^n \quad X \longmapsto AX$ canoniquement associée à une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Matrices d'une application linéaire. Formules de changements de bases. Cas des endomorphismes.

Calcul matriciel. Exemples de produits par blocs.

- Exemples de décompositions par blocs. Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$, isomorphe à $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Exemple : Calcul de $\dim F$, où $F = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u = 0\}$, avec $u \in \mathcal{L}(E)$ fixé.

- Lemme fondamental de l'algèbre linéaire : Si $\operatorname{Ker} u \oplus S = E$, u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$.

Décomposition matricielle : $A = QJ_rP$, où $r = \operatorname{rg} A$. *Remarque* : La notion de matrice équivalente est HP.

Théorème du rang.

Corollaires : $\dim u(F) = \dim F - \dim(F \cap \operatorname{Ker} u)$, rang d'une composée.

- Formes linéaires et hyperplans

Formes linéaires et matrices lignes. Dimension de $E^* = \mathcal{L}(E, K)$.

Hyperplan = noyau d'une forme linéaire non nulle ; caractérisation par la codimension.

Deux formes linéaires ont même noyau ssi elles sont proportionnelles.

Dimension d'un sev comme intersection d'hyperplans.

- Matrice de Van der Monde. Lien avec l'interpolation de Lagrange.

Pour $a_1, ..., a_n$ distincts, les formes linéaires $P \longmapsto P(a_i)$ sur $K_{n-1}[X]$ sont linéairement indépendantes.

- Systèmes linéaires. Nature de l'ensemble des solutions de $AX = B$.

Résolution par la méthode du pivot de Gauss.

Révisions sur les déterminants

Nota Bene : toutes les propriétés fondamentales sont admises

Propriétés du déterminant d'une matrice :

- $\det A = \det(A_1, ..., A_n)$ est une forme n-linéaire alternée de ses vecteurs colonnes.
- Déterminant de la transposée : $\det A = \det A^T$.

Ainsi, le déterminant est une forme n-linéaire alternée de ses vecteurs lignes.

- $\det AB = (\det A)(\det B)$; $\det A \neq 0$ ssi $A \in GL_n(K)$.

- Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

- Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes.

Cofacteurs $C_{ij} = \det(A_1, ..., A_{j-1}, E_i, A_{j+1}, ..., A_n) = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Développement du déterminant selon une ligne ou une colonne.

Le déterminant est un polynôme en les coefficients de A.

Déterminant de Van der Monde

Remarque : L'expression explicite de $\det A$ est hors-programme (comme la notion de signature).

- Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base, déterminant d'un endomorphisme.

Notions sur les formes n-linéaires alternées (= antisymétriques) sur un K-ev E de dimension n..

Droite vectorielle des formes n-linéaires alternées sur sur un K-ev E de dimension n.

$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), ..., u(x_n)) = (\det u)\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$.

- Expression de la solution d'un système $AX = B$ inversible : $x_i = \dfrac{\det(A_1, ..., A_{i-1}, B, A_{i+1}, ..., A_n)}{\det B}$.

Remarque : La notion de comatrice est hors-programme.

Réduction des endomorphismes (*début*)

Matrices semblables. Trace et déterminant.

Sous-espaces stables. Lien avec les valeurs propres (droites stables), avec les matrices compagnons, avec les matrices triangulaires supérieures.

Valeurs propres, sev propres, les sev propres sont en somme directe.

Matrices semblables. Trace et déterminant.

Sous-espaces stables. Lien avec les valeurs propres (droites stables), avec les matrices compagnons, avec les matrices triangulaires supérieures.

Valeurs propres, sev propres, les sev propres sont en somme directe.