

Programme des colles de mathématiques en PC*3

Semaine n°6 du mardi 12 novembre au vendredi 15 novembre

- Théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions

Théorème (admis) : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux convergeant simplement sur I vers f continue par morceaux et telle que $\sum \int_I |f_n|$ converge. Alors $\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

- Théorème de convergence dominée

Théorème : (admis) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux convergeant simplement sur I vers f continue par morceaux et telle qu'il existe φ intégrable telle que $|f_n| \leq \varphi$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

Exemple : Pour tout $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} (1 - \frac{t}{n})^n dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

Utilisation du th de cv dominée pour une série de fonctions $\sum (-1)^n f_n$ vérifiant le CSSA.

- Intégrales dépendant d'un paramètre

Extension du th de convergence dominée au cas d'un paramètre continu.

Continuité des intégrales dépendant d'un paramètre.

Dérivée des intégrales dépendant d'un paramètre.

Extension aux fonctions de classe C^n (la domination porte sur la dernière dérivée) et C^∞ .

- Révisions d'algèbre linéaire

- Combinaisons linéaires, sous-espaces vectoriels.

Sous-espace engendré par une famille de vecteurs, somme de sev

Applications linéaires, noyau et image.

- Familles génératrices, familles libres, bases.

Une famille (x_1, \dots, x_n) est liée ssi un des vecteurs est combinaison linéaire des précédents.

- Sev en somme directe. Cas d'une somme directe de deux sev, sev supplémentaires.

Base adaptée à une décomposition en somme directe.

Définition d'une application linéaire par ses restrictions aux sev d'une décomposition en somme directe.

- Dimension : Un K -ev E est de dimension n ssi il admet une base (= est isomorphe à K^n).

Théorèmes de la base extraite et de la base incomplète.

Toute famille libre est de cardinal $\leq n = \dim E$, avec égalité ssi elle est une base.

Un sev F de E est de dimension n ssi $F = E$.

Dimension d'une somme directe, relation de Grassmann.

- Codages matriciels :

Application linéaire $u : K^p \rightarrow K^n$ $X \mapsto AX$ canoniquement associée à une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Matrices d'une application linéaire. Formules de changements de bases. Cas des endomorphismes.

Calcul matriciel. Exemples de produits par blocs.

- Exemples de décompositions par blocs. Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$, isomorphe à $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Exemple : Calcul de $\dim F$, où $F = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u = 0\}$, avec $u \in \mathcal{L}(E)$ fixé.

- Lemme fondamental de l'algèbre linéaire : Si $\text{Ker } u \oplus S = E$, u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im } u$.

Décomposition matricielle : $A = QJ_rP$, où $r = \text{rg } A$. *Remarque* : La notion de matrice équivalente est HP.

Théorème du rang.

Corollaires : $\dim u(F) = \dim F - \dim(F \cap \text{Ker } u)$, rang d'une composée.

- Formes linéaires et hyperplans

Formes linéaires et matrices lignes. Dimension de $E^* = \mathcal{L}(E, K)$.

Hyperplan = noyau d'une forme linéaire non nulle ; caractérisation par la codimension.

Deux formes linéaires ont même noyau ssi elles sont proportionnelles.

Dimension d'un sev comme intersection d'hyperplans.

- Matrice de Van der Monde. Lien avec l'interpolation de Lagrange.

Pour a_1, \dots, a_n distincts, les formes linéaires $P \mapsto P(a_i)$ sur $K_{n-1}[X]$ sont linéairement indépendantes.

- Systèmes linéaires. Nature de l'ensemble des solutions de $AX = B$.

Résolution par la méthode du pivot de Gauss.