Programme des colles de mathématiques en PC*3

Semaine n°5   du lundi 04 novembre au vendredi 08 novembre

- Intégrales sur un intervalle quelconque

L'intégrale de $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ sur $[a, b[$ converge ssi il existe $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt$, notée $\int_a^b f(t)dt$.

Exemples des intégrales de Riemann.

Théorèmes de comparaison pour des intégrales de fonctions positives.

Intégrales absolument convergentes (fonctions intégrables)

Intégrations par parties et changements de variables

Exemple : Intégrales de Bertrand.

Exemple d'intégrale semi-convergente : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

- Séries numériques

Série (= suite des sommes partielles), séries convergentes.

Exemples de séries dont on sait calculer la somme : Séries géométriques, séries de la forme $\sum(u_{n+1} - u_n)$, utilisation de Taylor-Lagrange (exponentielle réelle, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$), admis : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Séries à termes réels positifs. Théorèmes de comparaisons.

Comparaisons entre sommes et intégrales :

Si f est décroissante positive, $\sum f(n)$ converge ssi l'intégrale de f converge sur $[0, +\infty[$.

Séries de Riemann.

Séries absolument convergentes. Théorème : Toute série absolument convergente est convergente.

Séries alternées. Majoration du reste.

Exemples d'utilisations de développements asympotiques pour l'étude de séries. Exemple : $\sum \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha})$.

Compléments : Exemple d'étude d'une suite par une série : constante γ. Critère de Raabe-Duhamel.

- Espaces de fonctions

Espace $L^1(I, \mathbb{R})$ des fonctions intégrables (cf intégrales absolument convergentes). Espace $l^1(\mathbb{R})$.

Espace des fonctions de carré intégrable. Si f et $g \in L^2$, alors $fg \in L^1$. Produit scalaire dans L^2. Espace $l^2(\mathbb{R})$.

- Théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions

Théorème (admis) : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux convergeant simplement sur I vers f continue par morceaux et telle que $\sum \int_I |f_n|$ converge. Alors $\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

- Théorème de convergence dominée

Théorème : (admis) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux convergeant simplement sur I vers f continue par morceaux et telle qu'il existe φ intégrable telle que $|f_n| \leq \varphi$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

Exemple : Pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}(1-\frac{t}{n})^n\ dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt$.

Utilisation du th de cv dominée pour une série de fonctions $\sum(-1)^n f_n$ vérifiant le CSSA.

- Intégrales dépendant d'un paramètre

Extension du th de convergence dominée au cas d'un paramètre continu.

Continuité des intégrales dépendant d'un paramètre.

Dérivée des intégrales dépendant d'un paramètre.

Extension aux fonctions de classe C^n (la domination porte sur la dernière dérivée) et C^∞.