Programme des colles de mathématiques en PC*3

Semaine n°4   du lundi 14 octobre au vendredi 18 octobre

- Théorème fondamental du calcul différentiel

IPP, changements de variables, Taylor-Lagrange avec reste intégral

Fonctions définies par une intégrale à bornes variables $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt$.

Th du prolongement C^1. *Exemple* : Fonction $x \longmapsto \exp(-1/x)$ si $x > 0$ et 0 si $x = 0$.

- Intégrales sur un intervalle quelconque

L'intégrale de $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ sur $[a, b[$ converge ssi il existe $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$, notée $\int_a^b f(t)dt$.

Exemples des intégrales de Riemann.

Théorèmes de comparaison pour des intégrales de fonctions positives.

Intégrales absolument convergentes (fonctions intégrables)

Intégrations par parties et changements de variables

Exemple : Intégrales de Bertrand.

Exemple d'intégrale semi-convergente : $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\ dt$.

- Séries numériques

Séries $\sum a_n$ (= suites des sommes partielles), séries convergentes : somme et restes.

Lien avec les intégrales de fonctions en escaliers

Exemples de séries dont on sait calculer la somme : Séries géométriques, séries de la forme $\sum(u_{n+1} - u_n)$, utilisation de Taylor-Lagrange (exponentielle réelle, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$), admis : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Séries à termes réels positifs. Théorèmes de comparaisons.

Comparaisons entre sommes et intégrales :

Si f est décroissante positive, $\sum f(n)$ converge ssi l'intégrale de f converge sur $[0, +\infty[$.

Séries de Riemann.

Séries absolument convergentes. Théorème : Toute série absolument convergente est convergente.

Séries alternées. Majoration du reste.

Exemples d'utilisations de développements asympotiques pour l'étude de séries. Exemple : $\sum \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha})$.

Compléments : Exemple d'étude d'une suite par une série : constante γ. Critère de Raabe-Duhamel.

- Espaces de fonctions

Espace $L^\infty(I, \mathbb{R})$. Espace $L^1(I, \mathbb{R})$ des fonctions intégrables (cf intégrales absolument convergentes).

Espace $L^2(I, \mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrable. Si f et $g \in L^2$, alors $fg \in L^1$. Produit scalaire dans L^2.

Espaces de suites.