

# Programme des colles de mathématiques en PC\*3

**Semaine n°3 du lundi 07 octobre au vendredi 11 octobre**

## - Fonctions convexes

Fonction convexe :  $\forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ .

Interprétation en termes de cordes : le graphe est situé au-dessous des cordes.

Inégalité des pentes ; caractérisation des fonctions convexes parmi les fonctions dérivables.

## - Inégalités usuelles en Analyse (*révisions*)

Inégalités triangulaires

Inégalité de Cauchy-Schwarz

IAF et inégalité de Taylor-Lagrange

Inégalité de convexité (*preuve non exigible*)

## - Développements limités (*révisions*)

Relations de comparaisons, méthodes générales de calculs des développements limités.

## - Exemples de développements asymptotiques de suites définies implitement

Suites de la forme  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Utilisation de Cesàro dans le cas d'une convergence lente.

Etude des suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $f_n(x_n) = 0$ .

## - Théorème fondamental du calcul différentiel

IPP, changements de variables, Taylor-Lagrange avec reste intégral

Fonctions définies par une intégrale à bornes variables  $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ .

Th du prolongement  $C^1$ . *Exemple* : Fonction  $x \mapsto \exp(-1/x)$  si  $x > 0$  et 0 si  $x = 0$ .

## - Intégrales sur un intervalle quelconque

Fonctions continues par morceaux

L'intégrale de  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  sur  $[a, b[$  converge ssi il existe  $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$ , notée  $\int_a^b f(t) dt$ .

Exemples des intégrales de Riemann

Théorèmes de comparaison pour des intégrales de fonctions positives

Intégrales absolument convergentes (fonctions intégrables)

Exemple : Intégrales de Bertrand.

Exemple d'intégrale semi-convergente :  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ .

Intégrations par parties et changements de variables.