Programme des colles de mathématiques en PC*3

Semaine n°2   du lundi 30 septembre au vendredi 04 octobre

- Révisions de quelques notions importantes de première année

Schémas logique : raisonnements par contraposition et par l'absurde.

Problèmes d'existence et d'unicité : exemples simples utilisant les notions de première année aussi bien en algèbre (ev de dimension finie) qu'en analyse (th de la bijection)

Principes de récurrence, notamment utilisation de la récurrence forte ou de la propriété de bon ordre

Combinatoire, notamment les coefficients binomiaux (et lien avec loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$)
Remarque : On pourra notamment poser des exercices de probabilités sur des ensembles *finis*.

Division euclidienne dans les entiers et écriture d'un entier en base b, notamment en base 2
Ecriture d'un réel $x \in [0, 1[$ en base 2.

Nombres complexes et géométrie.

Sommes et produits : Formules usuelles (sommes géométriques, binôme, ...)

- Polynômes

Ordre de multiplicité d'une racine
Nombre de racines d'un polynôme, polynômes scindés
Expression de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction des coefficients
Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$; théorème de d'Alembert-Gauss (admis)
Cas des racines réelles des polynômes réels
Polynômes de Tchebychev
Polynômes d'interpolation de Lagrange

- Parties convexes de $\mathbb{R}^n$ et valeurs moyennes

Parties convexes de $\mathbb{R}^n$, les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles
Valeurs moyennes pondérées (= barycentres à coefficients positifs), enveloppe convexe
Extension au cas continu : Formule de la moyenne pour une fonction continue.

Attention : Les fonctions convexes ne sont pas au programme cette semaine

- Topologie dans $\mathbb{R}$

Limites : définitions en termes de voisinages (élémentaires)
Caractérisation séquentielle de la limite (*admis ici*)

Passage à la limite des inégalités larges
Théorème de Cesàro pour les suites et les fonctions (preuve de type "pincement avec ε")

Distance à une partie, point adhérent à une partie, point intérieur à une partie
Approximations par un multiple de α, partie dense, exemples : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}$
Deux fonctions continues coïncidant sur une partie dense sont égales. *Exemple* : $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Borne supérieure d'une partie non vide et majorée (on peut poser $\sup A = +\infty$ si A non majorée).
Théorème de la limite monotone, suites adjacentes, propriété des segments emboités.

Parties fermées ; exemple : l'ensemble des zéros d'une fonction continue sur un intervalle fermé.

Parties convexes : les intervalles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$, TVI et théorème de la bijection.

Compacts (= fermés et bornés) ; image continue d'un compact, d'un segment (admis).

Point intérieur à une partie. Parties ouvertes.

Ensembles dénombrables. $\mathbb{Q}$ est dénombrable, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Nota Bene :

- La notion de valeur d'adhérence d'une suite est hors-programme

- La notion de sous-groupe est aussi hors-programme, donc a fortiori les propriétés des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ et des sous-groupes de $\mathbb{R}$. On a montré dans le cours la densité de $A = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ en utilisant le fait que A est stable par passage aux multiples et contient des éléments > 0 arbitrairement petits : $(\sqrt{2} - 1)^n \to 0^+$.

- Inégalités usuelles en Analyse (*révisions*)

Inégalités triangulaires

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité de Taylor-Lagrange

Inégalités de convexité

- Développements limités (*révisions*)

Relations de comparaisons, méthodes générales de calculs des développements limités.

- Exemples de développements asymptotiques de suites définies implitement

Suites de la forme $x_{n+1} = f(x_n)$. Utilisation de Cesàro dans le cas d'une convergence lente.
Etude des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $f_n(x_n) = 0$.