

1) (*Centrale*) Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\operatorname{rg} \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array} \right) \leq \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B) + \operatorname{rg}(C) + \operatorname{rg}(D)$.

2) (*Centrale*) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 + f^2 + f = 0$. On suppose qu'il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de f de degré inférieur ou égal à 2.

a) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Montrer que $\operatorname{rg} f = 2$.

b) Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker}(f^2 + f + \operatorname{Id})$. En déduire $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + f + \operatorname{Id})$.

c) Soit $x \in \operatorname{Ker}(f^2 + f + \operatorname{Id})$ non nul. Montrer que $(x, f(x))$ est libre.

d) Construire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3) (*Centrale*) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ telle que $\exists k \in \mathbb{N}^*, M^k = I_2$.

On note $d = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid M^k = I_2\}$.

a) Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et que $|\operatorname{tr} M| \leq 2$.

b) Donner les valeurs possibles de d .

4) (*Centrale*) Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$, tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$.

Montrer que $\sup_{|z|=1} |P(z)| \geq 1 + \frac{1}{n}$. *Indication* : Considérer $\int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta$.

5) (*Centrale*) On définit $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n}$. Montrer que $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$.

6) On pose sur $\mathbb{R}[X]$, $\|P\| = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$, $N(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \int_0^1 t^n P(t) dt \right|$ et $M(P) = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 t^n P(t) dt \right)^2}$.

Montrer qu'il s'agit bien de normes sur $\mathbb{R}[X]$. Ces normes sont-elles équivalentes ?

7) (*X-PSI*) Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Déterminer le nombre de triplets (A, B, C) de parties de E tels que $A \subset B \subset C$.

8) (*ENS-PSI*) Déterminer le nombre N de façons d'apparier les entiers de 1 à $2n$ en un ensemble de n paires.

9) (*X-PSI*) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et on note $N = \operatorname{card}\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

a) Montrer que $E(N) = +\infty$.

b) Exprimer $P(N \geq 2)$ en fonction de $P(N \geq 1)$.

c) Montrer que $P(N = +\infty) = 1$.

10) (*X-PSI*) Soit X_n de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On note A_n l'événement : 2^{X_n} admet 1 pour premier chiffre. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$.

11) (*X-PSI*) On pose $E_{n,d} = \{(i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d \mid i_1 + \dots + i_d = n\}$.

On pose $V_{n,d}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x_1, \dots, x_d) = x_1^{i_1} \dots x_d^{i_d}$, où $(i_1, \dots, i_d) \in E_{n,d}$.

a) Montrer que $V_{n,d}$ forme une famille libre et montrer que $\operatorname{card} V_{n,d} = \binom{n+d-1}{d-1}$.

b) Pour $f \in \operatorname{Vect}(V_{n,d})$, on note $\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}$. Déterminer $\operatorname{Ker} \Delta$.

12) a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

Combien de coefficients de M faut-il modifier au minimum pour rendre la matrice non inversible ?

b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non inversible, de rang $r < n$.

Combien de coefficients de M faut-il modifier au minimum pour rendre la matrice inversible ?

13) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, où $u_n = n \int_0^{+\infty} \sin(t^n) dt$.

14) Soit $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ injective. Déterminer la nature (convergente ou divergente) de $\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^2}$.

15) On note E l'ensemble des polynômes non nuls à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines des polynômes de E .

a) Soit $a \in A$. Montrer que $-a \in A$ et que si a n'est pas nul, on a $a^{-1} \in A$.

b) Montrer que $A \subset [-2, -\frac{1}{2}] \cup \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 2]$.

c) Montrer que 2 est adhérent à A .

16) Soit $n \geq 2$. On pose $g_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{4k}} \binom{2k}{k}^2$. Soit $K_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = K_n(x) + o(x^n)$.

a) Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_n(e^{i\theta})|^2 d\theta = g_n$.

b) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R \geq 1$. et de somme $f(z)$.

On suppose que pour tout $|z| < 1$, on a $|f(z)| \leq 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\sum_{k=0}^n a_k| \leq g_n$.

17) (*X PC*) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0 telle que $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$.

On suppose de plus que $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = \max_{0 \leq y \leq x} (f(y) + f(x-y))$. Montrer que f est nulle.

18) (*Centrale PC*) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de même loi.

On pose $Y_n = \text{card}\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ et $y_n = E(y_n)$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $y_n \leq k + nP(X > k)$. En déduire $y_n = o(n)$.

b) On suppose X d'espérance finie. Montrer que $y_n = O(\sqrt{n})$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

19) Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe deux matrices A et $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $AB + BA = O_n$.

20) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ symétrique de valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Soit $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive de rang 1.

On note $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ les valeurs propres de $A + B$. Montrer que $\mu_1 \geq \lambda_1 \geq \mu_2$.

21) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

Montrer que $\text{rg } A$ est pair et que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

22) (*X PC*) Soit $E = \llbracket 1, n \rrbracket$, et $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ une fonction aléatoire de loi uniforme.

On note X_n le nombre de $y \in E$ qui admettent au moins 3 antécédents par f .

Donner un équivalent de $E(X_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

23) (*X PC avec indications*) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'entiers naturels non nuls.

On tire des dés équilibrés, et le n -ième dé admet a_n faces. On note les tirages $X_1, \dots, X_n, \dots$

On note p la probabilité que $(X_n)_{n \geq 1}$ soit croissante.

a) Montrer que $p \geq \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$.

b) Que dire de $P(X_{n+1} \geq X_n \mid X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n = k)$ et de $k \mapsto P(X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n = k)$?

c) En déduire une CNS sur $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour que $p \neq 0$.

24) a) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Justifier l'existence de $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.

b) Soit $M = I_p + N$, où N nilpotente. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$.