

1) On considère $f : (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$.

a) Montrer que f se prolonge par continuité en $(0, 0)$.

b) Déterminer $\sup f$.

2) a) Déterminer avec soin les extrema de la fonction $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ sur $K = [0, \pi]^2$.

b) En déduire la valeur maximale du périmètre d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon r .

3) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

ssi il existe g et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $f(x, y) = g(x - y) + h(x + y)$.

4) On pose $\Delta = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Déterminer les fonctions $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant

$$(E) : y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = x + y$$

5) Déterminer les extrema sur $]0, +\infty[^2$ de $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$.

6) Via la compacité, montrer qu'il existe un triangle d'aire maximale parmi les triangles inscrits dans un cercle de rayon 1. Montrer (géométriquement) que ce triangle est équilatéral.

7) (*Centrale*) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ .

Montrer que F , définie par $F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ pour $x \neq y$, admet un prolongement de classe C^∞ à $\mathbb{R}^2$.

Indication : Ecrire $F(x, y)$ sous forme d'une intégrale à paramètre.

8) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On considère $f : X \mapsto \frac{X^T A X}{\|X\|^2}$ définie sur $U = \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

a) Montrer par un argument de compacité qu'il existe $X_0 \in U$ tel que $f(X_0) = \sup f$.

b) Calculer $\nabla f(X)$. En déduire que X_0 est un vecteur propre de f .

9) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

(ii) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

10) Soit $X'(t) = A(t)X(t)$, avec $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $t \mapsto A(t)$ continue.

a) On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est antisymétrique. Montrer que $t \mapsto \|X(t)\|$ est constante.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $\exp(tA) \in O_n(\mathbb{R})$.

11) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $a \in \mathbb{R}^n$.

On suppose que $f^{-1}(\{f(a)\})$ est un singleton. Montrer que f admet en a un extremum global.