

1) (*Mines*) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

On note R et R' les rayons de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{a_n} x^n$. Comparer R et R' .

2) (*Mines*) Une involution de E est une fonction $f : E \rightarrow E$ vérifiant $f \circ f = \text{Id}$.

a) On note I_n le nombre d'involutions de $E = \{1, 2, \dots, n\}$. Montrer que

$$I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(n)!}{(n-2k)! 2^k k!}$$

b) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{I_n}{n!} x^n$ est > 0 .

c) Trouver une relation de récurrence sur les I_n . En déduire une équation différentielle vérifiée par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$. En conclure la valeur de R .

3) (*Centrale*) On considère $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Déterminer le rayon de convergence R de $\sum u_n z^n$, et exprimer $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ par une fraction rationnelle.

4) On considère $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - v_n$ et $v_{n+1} = u_n - 2v_n$.

a) En utilisant les valeurs propres d'une matrice bien choisie, montrer que u_n et v_n sont en $O(\varphi^n)$, où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Que peut-on en déduire des rayons de convergence des séries entières $\sum u_n x^n$ et $\sum v_n x^n$.

b) Déterminer les rayons de convergence et calculer les sommes de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$.

5) (*Centrale*) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$. Montrer que $S_p = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p}^{-1}$ converge, et que $S_p = \frac{p}{p-1}$.

6) (*Mines*) Montrer que $\frac{x}{e^x - 1}$ est DSE et que les coefficients du DSE sont des nombres rationnels.

7) Montrer que $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est DSE au voisinage de tout réel $a > 0$.

8) Déterminer les solutions de $(E) : y'' + xy = 0$ développables en série entière.

9) a) En utilisant une équation différentielle, déterminer le DSE de $f(x) = (1+x)^\alpha$.

b) Montrer que $f(x) = (\arcsin x)^2$ est DSE en 0 et expliciter les coefficients du DSE.

10) (*X-ESPCI*) Soient $a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction définie par une série entière de rayon $\geq R$.

Montrer que toute solution de $(E) : y'(x) = a(x)y(x)$ est DSE de rayon de convergence $\geq R$.

11) On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k}\right)$, c'est-à-dire $a_0 = 1$ et $a_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) a_{n-1}$.

a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Montrer que $\sum a_n x^n$ admet un rayon de convergence $R = 1$.

b) Pour $x \in]-R, R[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que $2f'(x) = 2xf'(x) + f(x)$.

c) En déduire que $f(x) = (1-x)^{-1/2}$.

12) (*ENS*) Soit $\sum b_n x^n$ une série entière à coefficients positifs de rayon $R = 1$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$.

a) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

b) On suppose $a_n \sim b_n$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sim \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

13) (*X-ESPCI*) Soient $a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction définie par une série entière de rayon $\geq R$.

Montrer que toute solution de $(E) : y'(x) = a(x)y(x)$ est DSE de rayon de convergence $\geq R$.

14) (*Mines*) Montrer que $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ et $\sum \frac{A_n}{n!} z^n$ ont même rayon de convergence, où $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

15) (*Mines*) Déterminer les $x \in]-1, 1[$ tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 x^n = 0$.

16) (*Mines*) Soient $r > 0$ et E l'ensemble des fonctions $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ somme d'une série entière.

Pour $f \in E$, on pose $T(f) :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_0^1 f(tx) dt$.

Montrer que T est un endomorphisme de E , et déterminer les valeurs propres de T .

17) a) Soit $\phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Montrer que $\sum \frac{a_n z^n}{n!}$ admet un rayon de convergence infini.

b) On pose $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n z^n}{n!}$. Montrer que pour tout $|z| < R$, on a $\phi(z) = \int_0^{+\infty} \varphi(zx) e^{-x} dx$.

18) (*Centrale*) On note d_n le nombre de permutations sans point fixe de $\{1, 2, \dots, n\}$. On pose $d_0 = 1$.

a) Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k = n!$. Montrer que pour $|z| < 1$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} z^n$ est défini.

b) Calculer $e^z f(z)$. En déduire une expression de d_n (sous forme d'une somme).

19) (*Mines*) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum 3^{-n} (1 + \frac{2}{n})^n x^{4n}$.

20) (*Mines*) Déterminer le domaine de convergence de $\sum a_n z^n$, où a_n est la n -ième décimale de $\sqrt{3}$.

21) (*Mines*) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \sin(n) z^n$.

22) (*Centrale*) Montrer que $x \mapsto \exp(\exp x)$ est DSE avec un rayon de convergence infini.

23) (*X*) Les fonctions $x \mapsto \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ et $g : x \mapsto \operatorname{sgn}(x) \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ sont-elles DSE en 0 ?

24) (*Mines*) Montrer que $f : x \mapsto \frac{\exp(x^2) - 1}{x}$ admet un prolongement C^∞ sur $\mathbb{R}$. Préciser $\operatorname{Im} f$.

25) (*ENS*) Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes à coefficients positifs convergeant simplement vers f sur $[0, 1]$.

Montrer que f est développable en série entière sur $[0, 1[$, la série entière étant à coefficients positifs.