

1) Étudier la convergence uniforme de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $f_n : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{1 + nx}$ .

2) On admet que toute fonction continue sur  $[0, 1]$  est limite uniforme de fonctions polynômes.

a) Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$ . Montrer que  $f$  est nulle.

b) (★) Soit  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue intégrable telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$ . Montrer que  $f$  est nulle.

3) (★) (Oral X) Soit, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ , avec  $\sup |f'_n| \leq M$  indépendant de  $n$ .

On suppose que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Montrer que la convergence est uniforme.

4) (★) (Oral X) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions convexes convergeant sur un intervalle  $I$ .

Montrer que la convergence uniforme sur tout segment intérieur à  $I$ .

5) (extrait Oral Centrale) Soient  $d \in \mathbb{N}^*$ , et  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $\mathbb{R}_d[X]$  convergeant simplement sur  $[0, 1]$ .

Montrer que  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur tout segment de  $\mathbb{R}$  et que  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

6) On considère pour tout  $x \geq 0$ ,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(x+n)}$$

a) Montrer que  $f$  est bien définie et est continue. Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  et croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

b) Déterminer un équivalent de  $f(x)$  en  $+\infty$ .

7) Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante, positive et de limite nulle.

En utilisant la transformée d'Abel, montrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$  converge sur  $]0, \pi[$  vers une fonction continue  $f$ .

8) (Oral Centrale) a) On considère

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 - q^k x)$$

Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction continue  $f$ .

b) Déterminer une base de l'espace des fonctions  $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (1 - qx)f(qx)$ .

9) a) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de  $f_n : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^n \ln x$ .

b) Étudier la convergence simple et la convergence normale de la série  $\sum f_n$ .

10) Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x^2}.$$

Montrer que  $f$  est définie et de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

11) a) On pose, pour  $a$  et  $x > 0$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^a \exp(-n^2 x)$ . Étudier la continuité de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

b) On suppose  $a > \frac{1}{2}$ . Étudier  $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x)$ , en comparant  $f(x)$  avec une intégrale.

12) (Mines) Pour  $-1 < x < 1$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n\alpha)$$

**13)** (*Mines*) Ensemble de définition, de continuité, de dérivabilité de

$$f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$$

**14)** (*Mines*) On considère  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $a_0 = 1$  et

$$\forall n \geq 0, a_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$$

Montrer que  $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$  est défini pour tout  $|x| < 1$ . Relier  $S(x)^2$  et  $S'(x)$ . En déduire  $a_n$ .

**15)** (*ENS*) On note  $d_n$  le nombre de diviseurs positifs de  $n$ .

Pour  $s > 0$ , on pose  $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$  et  $f(s) = \sum_{n \geq 1} d_n n^{-s}$ .

a) Montrer que  $\sum_{k=1}^n d(k) = O(n \ln n)$  et en déduire les valeurs de  $s$  pour lesquelles  $f(s) < +\infty$ .

b) Montrer que  $f(s) = \zeta(s)^2$  (ce qui permet de retrouver a)). Donner un équivalent de  $f(s)$  en  $x = 1^+$ .

**16)** (*Mines*) Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite strictement croissante de réels tendant vers  $+\infty$ , avec  $a_0 > 0$ . Montrer

$$\int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x} \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$$

**17)** (*X*) a) Etudier la convergence de la série de fonctions  $f_n : x \mapsto (x - n)^{-2}$ , définies sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

b) Soit un réel  $c > 2$ . Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = cf(x)$$

Montrer que  $f = 0$ .

c) Montrer que pour tout réel  $x$  non entier,  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2} = \left( \frac{\pi}{\sin \pi x} \right)^2$ .

**18)** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $k$ -lipschitzienne.

a) Montrer que  $f$  est limite uniforme des polynômes  $P_n$  définis par

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

b) *Théorème de Chudnovski* : On suppose de plus  $f(0) \in \mathbb{Z}$  et  $f(1) \in \mathbb{Z}$ .

Montrer que  $f$  est limite uniforme de polynômes de  $\mathbb{Z}[X]$ .

**19)** On considère  $P_0(x) = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(x + P_n(x)^2)$ .

a) Montrer que  $\forall x \in [0, 1], (P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et converge vers  $f(x) = 1 - \sqrt{1-x}$ .

b) Montrer que  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers la fonction  $f$ .