

1) (*Mines*) Soient X et Y deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. On suppose $V(X) > 0$.

Trouver a et b dans $\mathbb{R}$ minimisant $E((Y - aX - b)^2)$.

2) Une puce se déplace sur l'axe $\mathbb{Z}$ en partant de 0. A chaque étape, elle fait un saut (d'une unité) à droite avec une probabilité p , et un saut à gauche avec une probabilité $q = 1 - p$.

On note X_n l'abscisse au bout de n sauts. Calculer la loi de X_n , son espérance, sa variance.

3) Soit $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$, où les X_k sont des v.a. de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ indépendantes.

a) On pose $M = XX^T$. Déterminer la loi de $\text{rg}(M)$ et de $\text{tr}(M)$.

b) Déterminer la probabilité que M soit une matrice de projection.

4) (*Mines*) Soit X, Y, Z trois variables aléatoires entières, indépendantes et de même loi.

Que dire si $X + Y + Z$ est toujours divisible par 3 ?

5) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On pose $M = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$ et $D = |X - Y|$.

a) Déterminer la loi et l'espérance de T . En déduire l'espérance de M .

b) Calculer $E(D)$. Déterminer un équivalent de $E(T)$ et de $E(D)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

6) Soient X_1 et X_2 des v.a. de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y une v.a. de Rademacher, les v.a. étant indépendantes.

Calculer la probabilité que la matrice $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7) (*ENS*) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ indépendantes.

On pose $N = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n = 1\}$ et $Y = X_{N+1} + \dots + X_{2N}$. Déterminer la loi de Y .

8) Soient X et Y deux v.a. indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Trouver la loi de $U = \frac{X}{Y}$ et calculer $E(U)$. Montrer que $E(U) > 1$.

9) (*ENS*) Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $X_1, \dots, X_n$ des v.a. i.i.d. à valeurs dans $[a, b]$ de même loi que X , avec $E(X) = 0$.

a) Soit $t > 0$. Montrer que $E(e^{tX}) \leq \exp\left(\frac{t^2(b-a)^2}{8}\right)$.

b) Soit $s > 0$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Montrer que $P(S_n \geq s) \leq \exp\left(-\frac{2s^2}{n(b-a)^2}\right)$.

10) Soient $V_1, \dots, V_n$ des *vecteurs* unitaires d'un espace préhilbertien réel (produit scalaire).

On se donne n variables aléatoires de Rademacher deux à deux indépendantes $X_1, \dots, X_n$.

a) On considère la variable aléatoire $R = \|\sum_{i=1}^n X_i V_i\|^2$. Montrer que $E(R) = n$.

b) Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que $\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i V_i\| \leq \sqrt{n}$.

11) Soit un entier $n \geq 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On les tire une à une sans remise.

On note X le nombre de tirages effectués pour obtenir les boules numérotées 1, 2, 3. Déterminer la loi de X .

12) a) Montrer que $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{I \subset \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{(\text{card } I)-1} P(\bigcap_{i \in I} A_i)$.

b) On munit l'ensemble E des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de la loi uniforme. Montrer que le nombre d_n de dérangements (c'est-à-dire les permutations sans point fixe) vaut $d_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!}$.

En déduire un équivalent de $d_n/n!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Déterminer l'espérance et la variance du nombre N de points fixes de $\sigma \in E$.

13) a) Soit ϕ une fonction K -lipschitzienne sur $[0, 1]$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on suppose connue une famille $(X_n^{(x)})_{n \geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(x)$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n^{(x)} = \frac{1}{n}(X_1^{(x)} + \dots + X_n^{(x)})$.

On pose $\phi_n(x) = E(\phi(S_n^{(x)}))$. Montrer que $(\phi_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers ϕ sur $[0, 1]$.

b) En déduire une preuve du théorème de Stone-Weierstrass pour les fonctions lipschitziennes.

14) On dispose d'une pièce de monnaie pipée de loi inconnue. Expliquer comment à l'aide d'une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de tirages on peut réaliser une expérience aléatoire de probabilité $\frac{1}{2}$.

15) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. i.i.d. définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de même loi $\mathcal{B}(p)$, avec $0 < p < 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $Y_n = X_n + X_{n+1}$.

a) Les v.a. Y_n sont-elles indépendantes ? Calculer la covariance de Y_n et Y_m pour $n < m$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k - 2p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

16) Soit $x \in [0, 1]$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre x .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de S_n .

b) Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. k -lipschitzienne. Montrer que $Q_n(x) = E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$ est un polynôme.

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{[0, 1]} |Q_n - f| = 0$.

17) Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $N = \text{card}\{X_1, \dots, X_n\}$.

a) Montrer que $E(N) = o(n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

b) On suppose $E(X_1) < +\infty$. Montrer que $E(N) = O(\sqrt{n})$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

18) On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$.

a) Pour $\sigma \in S_n$, on note $X(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ . Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

b) Pour $\sigma \in S_n$, on note $Y(\sigma)$ la longueur de l'orbite de 1 par σ . Calculer $E(Y)$.

c) En déduire le nombre moyen de cycles dans la décomposition de σ .

19) (ENS) Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs.

On dit que λ est une valeur médiane ssi $P(X \leq \lambda) \geq \frac{1}{2}$ et $P(X \geq \lambda) \geq \frac{1}{2}$.

a) Montrer qu'il existe une valeur médiane. Est-elle toujours unique ?

b) Trouver t minimisant $t \mapsto E((X - t)^2)$.

c) Trouver t minimisant $t \mapsto E(|X - t|)$. *Indication* : Étudier le graphe de $f : t \mapsto \sum_{k=1}^n a_k |x_k - t|$.

20) a) Soit pour $\lambda > 0$, X_λ une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ .

Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $P(|X_\lambda - \lambda| \geq \varepsilon\lambda) \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$.

b) Soient X_λ , Y_λ et Z_λ des v.a. qui suivent la loi de Poisson de paramètre λ . Déterminer la limite lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$ de la probabilité que le polynôme $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ ait toutes ses racines réelles.

21) a) Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. i.i.d. telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, P(Z_n = k) = 2^{-k}$.

On pose $T_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$. Montrer que pour $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|T_n - 2n| \geq \varepsilon n) = 0$.

b) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. i.i.d. telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, P(X_n = 2^k) = 2^{-k}$.

On pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Montrer que pour $k > \frac{1}{\ln(2)}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \geq kn \ln n) = 0$.

Indication : Considérer la probabilité qu'il existe $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $X_m \geq k \ln n$.

22) On lance une pièce qui a une probabilité p de donner *pile*. On note N le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux fois *pile*. Donner la loi de N . Calculer $E(N)$.