Cogitos : Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice A

1) On considère $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{e^t - 1}\ dt$.

a) Prouver que $f(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. *Remarque* : Ce serait faux si on prend e^{itx} au lieu de $\sin(tx)$.

b) Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1.

2) On considère désormais $f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t - 1}\ dt$.

a) Montrer que $\frac{\sin(t)}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(t)$, où $\varphi_n(t) = \sin(t)e^{-nt}$.

b) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ de partie réelle > 0, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\ dt = \frac{1}{\lambda}$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\int_0^{+\infty} \varphi_n(t)\ dt = \frac{1}{n^2+1}$.

c) Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \int_0^{+\infty} e^{-nt}\ dt$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \int_0^{+\infty} te^{-nt}\ dt$ sont-elles convergentes ? En déduire $f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice B

On considère $f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\ t^x\ dt$.

1) Montrer avec soin que $f(x)$ est défini pour tout $x > -1$.

2) Justifier que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3) Calculer $f'(x)$, et en déduire $f(x)$.

Indication : Montrer que $f'(x) = \int_0^1 (t-1)\ t^x\ dt = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$.

En déduire que $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + k$. Conclure avec 2) que $k = 0$.

Exercice C

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1) Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\ dt$ est définie pour tout $x \geq 0$, et que f est continue sur $[0, +\infty[$.

2) a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et est solution de l'équation différentielle $(E) : y - y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3) En déduire que $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}e^x}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ dt$.

Remarque : Noter que f est la solution de (E) convergeant vers 0 en $+\infty$.

4) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Indication : On peut utiliser 3) et une intégration par parties ou bien utiliser la définition initiale de f avec le changement de variable $u = t\sqrt{x}$ et le théorème de convergence dominée.

Corrigés des Cogitos sur les intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice A

1) a) Posons $\forall t>0$, $\varphi(t)=\dfrac{\sin(tx)}{e^t-1}$.On a $\varphi(t)=\dfrac{\sin(tx)}{e^t-1}\to x$ en 0, donc φ prolongeable par continuité en 0.

En $+\infty$, $\varphi(t)=O_{+\infty}\left(e^{-t}\right)$ et comme $t\longmapsto e^{-t}$ est intégrable, alors φ est intégrable.

b) Posons $\varphi(t,x)=\dfrac{\sin(tx)}{e^t-1}$. On a $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)=\dfrac{t}{e^t-1}\cos(tx)$.

- Pour tout x, les applications $t\longmapsto\varphi(t,x)$ et $t\longmapsto\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)$ sont continues par morceaux.

- Pour tout $t>0$, l'application $x\longmapsto f(x,t)$ est continue.

- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)\right|\leq\psi(t)=\dfrac{t}{e^t-1}$ qui est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Donc $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est de classe C^1, et $f'(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{t}{e^t-1}\cos(tx)\ dt$.

2) a) On a $\forall t>0$, $\dfrac{1}{e^t-1}=\dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}}=e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nt}=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-(n+1)t}=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nt}$.

Ainsi, $\dfrac{\sin(t)}{e^t-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_n(t)$, avec $\varphi_n(t)=\sin(t)e^{-nt}$.

b) On a $\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\ dt=\left[-\dfrac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^{+\infty}=\dfrac{1}{\lambda}$, car $\lim_{t\to+\infty}e^{-\lambda t}=0$ (car $\left|e^{-\lambda t}\right|=e^{(\operatorname{Re}\lambda)t}$ et $\operatorname{Re}\lambda<0$).

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\int_0^{+\infty}\varphi_n(t)\ dt=\sin(t)e^{-nt}\ dt=\operatorname{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{-(n-i)t}\ dt\right)=\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{n-i}\right)=\dfrac{1}{n^2+1}$.

c) On a $\int_0^{+\infty}e^{-nt}\ dt=\dfrac{1}{n}$ donc la série $\sum\int_0^{+\infty}e^{-nt}\ dt$ diverge.

On a $\int_0^{+\infty}te^{-nt}\ dt=\dfrac{1}{n}\int_0^{+\infty}e^{-nt}\ dt=\dfrac{1}{n^2}$ donc la série $\sum\int_0^{+\infty}te^{-nt}\ dt$ converge.

On va appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

On va utiliser la majoration $|\varphi_n(t)|\leq te^{-nt}$, qui résulte de $|\sin(t)|\leq t$.

On a ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|\varphi_n(t)|\ dt\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}te^{-nt}\ dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}<+\infty$.

Par le théorème ITT, on en déduit que $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin(t)}{e^t-1}\ dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\varphi_n(t)\ dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$.

Exercice B

1) On considère $f(x)=\int_0^1\dfrac{t-1}{\ln t}\ t^x\ dt$. Soit $x>-1$.

En $t=1^-$, $\dfrac{t-1}{\ln t}\ t^x\sim 1$ car $(\ln t)\sim_1(t-1)$.

En $t=0^+$, $\dfrac{t-1}{\ln t}\ t^x\sim\dfrac{t^{x-1}}{-\ln t}=O\left(t^{x+\varepsilon-1}\right)$, où on choisit $\varepsilon>0$ assez petit pour que $x+\varepsilon-1>-1$.

Donc $t\longmapsto\dfrac{t-1}{\ln t}\ t^x$ est intégrable sur $]0,1]$.

2) On a $\forall t\in[0,1[$, $\lim_{x\to+\infty}t^x$, donc $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{t-1}{\ln t}\ t^x=0$.

D'autre part, on a $\forall x\geq 0$, $\forall t\in[0,1[$, $\left|\dfrac{t-1}{\ln t}\ t^x\right|\leq\dfrac{t-1}{\ln t}=\varphi(t)$ intégrable sur $]0,1[$.

Par cv dominée et caractérisation séquentielle, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\int_0^1 0\ dt=0$.

3) En posant $g(x,t)=\dfrac{t-1}{\ln t}\ t^x=\dfrac{t-1}{\ln t}\ e^{x\ln t}$, on a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=(t-1)\ t^x$.

Pour tout $\boxed{\alpha>-1,}$ on a $\forall x\in[\alpha,+\infty[$, $\forall t\in]0,1]$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leq t^\alpha=\varphi(t)$, avec φ intégrable sur $]0,1]$.

On en éduit que $f'(x) = \int_0^1 (t-1)\, t^x \; dt = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+1}$.

Donc $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right) + k$. Par 2), on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc $k = 0$.

Exercice C

1) On utilise la domination uniforme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(\forall t \in [0, +\infty[, \; \left|\dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)\right)$, avec φ intégrable.

On en déduit que $f(x)$ est définie pour tout $x \geq 0$, et que f est continue sur $[0, +\infty[$.

2) a) Avec $g(x,t) = \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$, on a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{t^2}{1+t^2}\; e^{-xt^2}$.

Montrons que la domination de $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est unfirme en x pour tout $x \in [a, +\infty[$, où $a > 0$.

En effet, on a $\forall x \in [\alpha, +\infty[$, $\forall t \in [0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at^2} = \varphi(t)$, avec φ intégrable sur $]0, +\infty[$.

On en déduit que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et que $f'(x) = -\int_0^{+\infty} \dfrac{t^2}{1+t^2}\; e^{-xt^2}\; dt$.

Donc $f(x) - f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\; dt = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\; du = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ (avec le changement de variable $u = \sqrt{x}t$).

b) On peut appliquer la convergence dominée car $\left|\dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ et $\forall t > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2} = 0$.

On peut majorer $f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\; dt = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\; du = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, donc par pincement $\lim_{+\infty} f = 0$.

3) On sait résoudre (E) par la méthode de variation de la constante.

Les solutions de $(H) : y' = y$ sont les $y(t) = ke^t$.

On pose donc $y(t) = z(t)e^t$, et y vérifie (E) ssi $z'(t)e^t = -\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$.

Donc les solutions de (E) sont les $y(x) = -\dfrac{\sqrt{\pi}e^x}{2}\left(\int_1^x \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\; dt + k\right)$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Ainsi, il existe k tel que $f(x) = -\dfrac{\sqrt{\pi}e^x}{2}\left(\int_1^x \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\; dt + k\right)$.

Or, comme $\lim_{n\to+\infty} f(x) = 0$, on a $k = \int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\; dt$, d'où on conclut $y(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}e^x}{2} \int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\; dt$.

4) *Première méthode* : En intégrant par parties, on a $\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\; dt = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} + \int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{2t^{3/2}}\; dt$.

Or, $\left|\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{2t^{3/2}}\; dt\right| \leq \dfrac{1}{2x^{3/2}} \int_x^{+\infty} e^{-t}\; dt = \dfrac{e^{-x}}{2x^{3/2}}$. Donc $\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{2t^{3/2}}\; dt = o_{+\infty}\left(\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)$.

On en déduit que $\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sim \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$, donc $f(x) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

Deuxième méthode : Avec $u = t\sqrt{x}$, on obtient $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} g(x)$, avec $g(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u^2}}{1+u^2/x}\; dt$.

On a $\forall x \geq 0$, $\forall u \geq 0$, $\dfrac{e^{-u^2}}{1+u^2/x} \leq e^{-u^2} = \varphi(u)$ et $\forall u \geq 0$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-u^2}}{1+u^2/x} = e^{-u^2}$.

Par cv dominée (variante avec paramètre continu), on obtient $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\; du = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ainsi $g(x) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, et $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} g(x) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.