DA de suites définies implicitement

DA de suites définies par une équation

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^5 + nx = n$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution x_n.

b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

Indication : Avec $f_n(x) = x^5 + nx - n$, noter que $\lim_{n\to+\infty} f_n(1-\varepsilon) < 0$ et que $f_n(1) > 0$.

c) Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $P_n(x) = x^3 - 3x^2 + 1 + n(x - x^2)$.

a) Montrer que P admet trois racines réelles a_n, b_n et c_n vérifiant $a_n < 0 < b_n < 1 < c_n$.

b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$ et $c_n = n + 2 + \mathfrak{o}_{+\infty}(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Equivalents des suites $u_{n+1} = f(u_n)$

3) Soit $f : [0, \alpha] \to [0, \alpha]$ de classe C^2 tel que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $\forall x \in]0, \alpha[$, $0 < f(x) < x \leq \alpha$.

a) On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in]0, \alpha[$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0^+$.

b) On suppose $f(x) = x - \lambda x^2 + \mathfrak{o}\left(x^2\right)$, avec $\lambda > 0$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n} = \lambda$. En déduire $x_n \sim \dfrac{1}{\lambda n}$.

c) On suppose $f(x) = x - \mu x^3 + \mathfrak{o}\left(x^3\right)$, avec $a > 0$.

On considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. On suppose $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0^+$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{(u_{n+1})^2} - \dfrac{1}{(u_n)^2}\right) = 2\mu$, et en déduire $u_n \sim \sqrt{\dfrac{1}{2\mu n}}$.

Solution 1) c) On pose $x_n = 1 - \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

On a $n\varepsilon_n = (1 + \varepsilon_n)^5$, donc $\varepsilon_n \sim \dfrac{1}{n}$. Donc $x_n = 1 - \dfrac{1}{n} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Remarque : On peut trouver un terme supplémentaire. On pose $x_n = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{\alpha_n}{n}$, avec $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

On a alors $\left(1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{\alpha_n}{n}\right)^5 = 1 - \alpha_n$. Donc $1 - \dfrac{5}{n} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 - \alpha_n$, donc $\alpha_n \sim \dfrac{5}{n}$.

Donc $x_n = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{5}{n^2} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2) a) Comme $\deg P = 3$, il suffit de vérifier que P s'annule dans chaque intervalle $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Or, on a $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$, $P(0) = 1$, $P(1) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. On a $-\varepsilon - \varepsilon^2 < 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} P_n(-\varepsilon) = +\infty$, donc $P_n(-\varepsilon) > 0$ pour n assez grand.

Comme $P_n(0) > 0$, alors $-\varepsilon < a_n < 0$ pour n assez grand. Donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

De même, on montre que pour $\varepsilon \in]0, 1]$, $\lim_{n\to+\infty} P_n(1 - \varepsilon) = +\infty$, donc $1 - \varepsilon < b_n < 1$ pour n assez grand

Comme (relations entre coefficients et racines) $a_n + b_n + c_n = n + 2$, alors $c_n = n + 2 + \mathfrak{o}_{+\infty}(1)$.

3) a) $[0, \alpha[$ est stable par f et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (car $f \leq \mathrm{Id}$).

La limite $L = \lim_{n\to+\infty} x_n$ existe dans $[0, x_0]$ et vérifie donc $f(L) = L$ par continuité de f en L.

b) On a $\left(\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{x}\right) \sim \dfrac{\lambda x^2}{x^2} = \lambda$, car $f(x) \sim x$ et $x - f(x) \sim \lambda x^2$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n} = \lambda$.

Par Cesàro, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{x_n} = \lambda$, c'est-à-dire $x_n \sim \dfrac{1}{\lambda n}$ (car λ non nul)..

c) On a $\left(\dfrac{1}{f(x)^2} - \dfrac{1}{x^2}\right) \sim \dfrac{\lambda x^4}{x^4}$, car $f(x)^2 = x^2(1 - \mu x^2 + \mathfrak{o}\left(x^2\right))^2 = x^2(1 - 2\mu x^2 + \mathfrak{o}\left(x^2\right)$.

On conclut à nouveau par composition des limites, puis Cesàro.

On peut ensuite passer à la racine carrée les équivalents : si $\lim_{x\to 0} \frac{u(x)}{v(x)} = 1$, alors $\lim_{x\to 0} \frac{u(x)^\alpha}{v(x)^\alpha} = 1$.