Oraux 2022 Centrale Python

1) On fait des lancers indépendants de pièces, la probabilité d'obtenir *pile* au k-ième lancer étant p_k. On note X_n le nombre de *pile* sur les n premiers lancers et π_n la probabilité que X_n soit pair.

a) Simuler l'expérience avec PYTHON en définissant une fonction `pi(n,p)` où $p : k \longmapsto p_k$ fonction.

On utilisera 1000 essais.

b) Tracer π_n pour $1 \leq n \leq 100$ dans les trois cas suivants :

(i) $p_k = \dfrac{1}{2(k+1)^2}$; (i) $p_k = \dfrac{1}{2(k+1)}$; (i) $p_k = \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}}$.

c) Montrer que $\pi_n - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}(1-2p_k)$. En déduire une nouvelle façon de tracer $(\pi_n)_{1\leq n\leq 100}$.

d) On suppose que $\forall k \geq 1,\ 0 < p_k < \dfrac{1}{2}$. Montrer que $(\pi_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel L.

Montrer que $L = \dfrac{1}{2}$ ssi $\sum p_n$ diverge.

2) On considère $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ n & 0 & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & n \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

a) Écrire une fonction PYTHON qui retourne A.

b) Montrer que A_3 est diagonalisable et la diagonaliser.

On dispose de n boules réparties dans deux urnes U_1 et U_2.

À chaque instant $k \in \mathbb{N}^*$ on déplace une boule d'une urne dans l'autre.

On note N_k le nombre de boules dans l'urne U_1 à l'instant k.

c) Déterminer la loi de N_0.

d) Montrer que $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $P(N_{k+1} = j) = \dfrac{n-j-1}{n} P(N_k = j-1) + \dfrac{j+1}{n} P(N_k = j+1)$.

e) On pose $Z_k = (P(N_k = j))_{1\leq j\leq n}$. Exprimer Z_k en fonction de Z_0.

Ecrire une fonction en PYTHON qui étant donnés n et k retourne Z_k.

On considérera ici qu'initialement, toutes les boules dans l'urne U_1.

f) Soit $\varphi_n; \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'endomorphisme associé à A_n. Exprimer $\varphi_n(P)$ en fonction de P, P' et n.

3) a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $(E_n) : x + x^2 + ... + x^n = 1$ admet une unique solution $u_n \in [0, 1]$

b) Rappeler la formule de Stirling.

c) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $0 < u_n < 1$.

d) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On pose $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

d) À l'aide de PYTHON, écrire une fonction `u(n)` qui retourne u_n. Conjecturer la valeur de L.

e) On pose $v_n = 2^n(u_n - L)$. Conjecturer avec PYTHON le comportement asymptotique de $(v_n)_{n\geq 1}$.

f) Montrer que $u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} n(u_n - L) = 0$. En déduire la limite $\lambda = \lim_{n\to+\infty} v_n$.

4) On considère $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\exp(-tx)}{1+t}\, dt$.

a) Tracer la courbe représentative de F à l'aide de Python. Que peut-on conjecturer sur le domaine de définition, les variations et limites de F ? Démontrer ces conjectures.

b) Montrer que F est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants.

En déduire que F est de classe C^∞ sur son domaine de définition.

5) On dispose de n urnes $U_1, ..., U_n$ et n boules numérotées de 1 à n, que l'on place indépendamment dans les urnes, chaque boule ayant la probabilité $\frac{1}{n}$ d'être placée dans l'urne U_i.

On note X_n le nombre d'urnes vides après le placement des n boules.

a) Écrire en Python une fonction `different` qui prend une liste L d'entiers et qui renvoie le nombre d'éléments distincts de L. Par exemple, `different([1,2,3,1,2])` renvoie 3.

b) Écrire en Python une fonction `simulX` qui prend un entier n et renvoie une simulation de X_n.

c) On note Y_i la variable aléatoire valant 1 si l'urne U_i est vide, 0 sinon. Déterminer la loi de Y_i.

d) Montrer que $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. La loi de X_n est-elle binomiale ?

e) Calculer l'espérance de X_n.

f) Écrire en Python une fonction `espeVarX` qui prend en entrée un entier n et renvoie une valeur approchée de $E(X_n)$ et de $V(X_n)$.

g) Calculer $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$ pour i et j distincts. En déduire la variance de X_n.

6) On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$.

a) Calculer le gradient de f. Déterminer les points critiques.

b) Tracer les lignes de niveau $f(x, y) = k$ pour $k \in \{-3, -2.5, -2, ..., 3\}$.

Que peut-on conjecturer sur les points critiques de f ?

c) Tracer la courbe $h : t \longmapsto f(1 + t, t)$. Conjecture sur la nature du point $(1, 0)$?

d) Démontrer la conjecture du d).

e) Par un argument de symétrie, que dire du second point critique ?

f) On note $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et C le bord de B.

Montrer que f atteint ses extrema sur B et que ces extrema sont atteints sur C.

g) Tracer C en superposant la courbe avec les lignes de niveau de f.

h) Déterminer les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.

7) On s'intéresse au problème FL(n) suivant : étant donnés des complexes $a_0, ..., a_{n-1}, \lambda_0, ..., \lambda_{n-1}$, existe-t-il une matrice dont les coefficients diagonaux sont les a_i et les valeurs propres les λ_i ?

a) Montrer qu'une condition nécessaire est $\sum_{i=1}^{n-1} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$.

On suppose désormais que cette propriété est réalisée et on va démontrer la réciproque.

b) Ecrire en Python une fonction `mat(a,L)` qui étant donnés $a = [a_0, ..., a_{n-1}]$ et $L = [\mu_0, ..., \mu_{n-2}]$ renvoie la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & & & \\ & a_1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-2} & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

c) Montrer que le problème FL(2) a une solution ssi $a_0 + a_1 = \lambda_0 + \lambda_1$.

Préciser une solution sous cette condition

d) On pose , pour $0 \leq k \leq n$, $P_k = \prod_{i=0}^{k-1}(X - a_i)$. Montrer que $(P_0, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, et qu'il existe des complexes $\mu_0, ..., \mu_{n-1}$ tels que $\prod_{i=0}^{n-1}(X - \lambda_i) = P_n - \sum_{k=0}^{n-2} \mu_k P_k$.

e) Ecrire en Python une fonction qui étant donnés a et $Y = [\lambda_0, ..., \lambda_{n-1}]$ renvoie $L = [\mu_0, ..., \mu_{n-2}]$.

f) Vérifier en Python avec $a = [2, 2, 2]$ et $[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2] = [1, 2, 3]$ que $\chi_M(X) = \prod_{i=0}^{n-1}(X - \lambda_i)$.

g) Justifier mathématiquement que $\chi_M(X) = P_n - \sum_{k=0}^{n-2} \mu_k P_k$. Conclure.