Epreuves orales Math-info. Algèbre

Exercice A

On considère n joueurs, numérotés de 1 à n, avec $n \geq 2$, participant à un tournoi où chacun affronte une fois tous les autres. On définit la matrice A d'ordre n de la manière suivante :

$$a_{ii} = 0,\ a_{ij} = 1 \text{ si } i \text{ a gagné contre } j, \text{ et } a_{ij} = -1 \text{ si } j \text{ a gagné contre } i$$

1) Écrire une fonction `tournoi(n)` renvoyant une matrice d'ordre n de tournoi aléatoire.

2) Calculer des valeurs de $\det A$. On pourra par exemple prendre dix valeurs pour tout $n \in \{5, 6, 7, 8\}$.

3) Démontrer que $\det A = 0$ pour tout n impair.

4) a) Soit J la matrice ne contenant que des 1. Calculer $\det(J_n - I_n)$.

b) Soient A et B deux matrices à coefficients entiers telles que les coefficients de $(A - B)$ sont pairs.

Montrer que $(\det A)$ et $(\det B)$ ont même parité.

c) Montrer que $\det A$ est impair pour tout n pair.

Exercice B

Soit $M(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où $t \in \mathbb{R}^+$.

1) Montrer que les valeurs propres de $M(t)$ sont réelles. On les note $\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \lambda_3(t)$.

2) Ecrire une fonction qui étant donné une liste $[a, b, c]$ renvoie la liste triée.

3) Représenter sur un même graphe les fonctions $t \longmapsto \lambda_i(t)$, avec $i \in \{1, 2, 3\}$.

4) Calculer le polynôme caractéristique χ_t de $M(t)$. On trouvera $\chi_t(x) = x^3 - 2x - t(x^2 - 1)$.

En déduire que $\lambda_1(t) < -1 < \lambda_2(t) < 1 < \lambda_3(t)$.

5) Déterminer les limites de λ_1, λ_2 et λ_3 en $+\infty$.

Indication : Utiliser $\lim_{t\to+\infty} \chi_t(M)$ pour justifier $\lim_{t\to+\infty} \lambda_3(t) = +\infty$.

Exercice C

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a un réel non nul. On pose $b = a^{-1}$ et $A_n = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & \dots & 0 \\ a & 0 & b & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & b \\ 0 & \dots & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Écrire une fonction qui étant donnés un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel a non nul renvoie la matrice A_n.

2) Donner des valeurs approchées décimales des valeurs propres de A_n pour $n \in [\![3, 8]\!]$ et $a \in \{-2, -1, 1, 2, 3\}$.

3) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes définies par $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - 1$ et $\forall n \geq 2$, $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$.

a) Calculer les coefficients de P_n pour $n \in [\![3, 8]\!]$.

b) Donner des valeurs approchées des racines de P_n pour $n \in [\![3, 8]\!]$.

c) Conjecturer un lien entre P_n et A_n, et le démontrer.

4) Les matrices A_n sont-elles inversibles ? diagonalisables ?

5) Proposer un segment de $\mathbb{R}$ qui contient toutes les racines de A.

Indication : On pourra se souvenir qu'une matrice à diagonale dominante est inversible.

Exercice D

Pour P et $Q \in E = \mathbb{R}_4[X]$, on poe $\phi(P,Q) = \int_{-2}^{+2} P(t)Q(t)\ dt$.

1) Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E et l'implémenter.

2) Montrer que le sev des polynômes pairs et impairs sont supplémentaires orthogonaux dans E.

3) Déterminer une base orthonormale de E.

4) On pose $f(P) = 2XP' + (X^2 - 4)P''$. Montrer que f est un endomorphisme symétrique.

Déterminer la matrice de f dans la base canonique, et en déduire ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.

Exercice E

Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\|X\| = \sqrt{X^T X}$. On note S_{n-1} l'ensemble des $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|X\| = 1$.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit son image numérique par $W(M) = \{X^T M X,\ X \in S_{n-1}\}$.

1) Ecrire une fonction Python renvoyant un vecteur aléatoire de S_{n-1}.

Indication : Construire un vecteur aléatoire non nul de $[\![-1000, 1000]\!]^n$, et diviser par sa norme.

2) On considère $A = (i + j - 1)_{1 \le i \le 4, 1 \le j \le 4} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Représenter graphiquement $W(A)$.

Calculer les valeurs propres de A.

3) Procéder de même avec $B = (\delta_{i=j+1})_{1 \le i \le 4, 1 \le j \le 4} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

4) Montrer numériquement que $C = (\delta_{i=j+1})_{1 \le i \le 4, 1 \le j \le 4}$ et $D = \frac{1}{2}(\delta_{i=j+1} + \delta_{i=j-1})_{1 \le i \le 4, 1 \le j \le 4}$ ont même image.

5) Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Exprimer $W(M)$ en fonction des valeurs propres de M.

Exercice F

1) Montrer avec Python que $(5+i)^4(239-i) = 114244(1+i)$.En déduire : $4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}) = \frac{\pi}{4}$.

2) Montrer : $\forall x \in [0,1]$, $\left|\arctan(x) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}\right| \le x^{2n+3}$.

En déduire une valeur approchée de π à 10^{-15} près.

Remarque : Python fonctionne en double précision, c'est-à-dire que les nombres flottants sont codés sur 64 bits. La mantisse étant codée sur 53 bits, la manipulation des nombres flottants entraîne systématiquement une erreur de 2^{-53}, c'est-à-dire environ 10^{-16} sur la mantisse, donc sur le 17-ième chiffre significatif du nombre.

Epreuves orales Math-info. Analyse

Exercice A

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = n(x + x^3)$.

1) Montrer que $f_n(x) = 1$ admet une unique solution x_n.

2) Ecrire en Python une fonction x renvoyant x_n. Représenter $(x_n)_{1 \leq n \leq 30}$. Conjecture ? Prouver ce résultat.

3) Déterminer numériquement puis mathématiquement un équivalent simple de x_n, qu'on note λ_n.

4) Déterminer numériquement a et b tels que $x_n = \lambda_n + \dfrac{a}{n^2} + \dfrac{b}{n^3} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

5) Déterminer mathématiquement a et b. Quelle est la nature de la série de terme général $(x_n)^{nx_n}$?

Exercice B

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution $a_n \geq 0$.

2) Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et tend vers $+\infty$.

3) Ecrire en Python une fonction calculant a_n. Représenter $(a_n/n)_{1 \leq n \leq 20}$.

4) Montrer mathématiquement que $a_n \sim n$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice C

On considère $\forall x > 0$, $f(x) = \int_x^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t^2}\, dt$ et $g(x) = \int_x^{+\infty} \dfrac{\cos t}{t^3}\, dt$.

On utilisera `quad` du module `scipy.integrate` et `fsolve` du module `scipy.optimize`.

Attention pour obtenir une valeur approchée de $\int_x^{100} f(t)\, dt$, utiliser `quad(f,x,inf)[0]`, car `quad` renvoie un couple.

On peut définir la fonction f avec `def f(x) :   ...` ou avec `lambda(x :   ...)`

1) Vérifier que f et g sont définies sur $]0, +\infty[$, et que $\forall x > 0$, $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2} - 2g(x)$.

2) Tracer en Python le graphe de $x \longmapsto x^2 g(x)$. Conjecturer $\lim_{x \to +\infty} x^2 g(x)$ et prouver la conjecture.

3) On *admet* qu'il existe un unique $x \in]n\pi, (n+1)\pi[$ tel que $f(x_n) = 0$.

Ecrire en Python la fonction `x(n)` renvoyant x_n. Tracer la suite $n \longmapsto x_n - n\pi$. Conjecturer sa limite.

Démontrer la conjecture.

4) Prouver que $f(n\pi) = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{\pi} \dfrac{\sin t}{(t + k\pi)^2}\, dt$. Prouver la propriété admise au 3).

Exercice D

On considère $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\sin t)^{2n}\, dt$.

1) Justifier l'existence de I_n et la monotonie de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2) Ecrire une fonction Python renvoyant I_n.

3) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$. La série $\sum(-1)^n I_n$ converge-t-elle ?

4) Pour $\varepsilon > 0$, on pose $N(\varepsilon) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid I_n \leq \varepsilon\}$.

Montrer que $N(\varepsilon)$ existe et définir en PYTHON une fonction calculant $N(\varepsilon)$.

5) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n I_n$.

Exercice E

On considère $f : x \longmapsto \int_0^x \dfrac{(\sin t)^3}{t^2}\, dt$.

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et tracer son graphe sur $[0, 5\pi]$.

2) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

3) On pose $J = f(\pi)$ et $M = f(\frac{\pi}{2})$. Donner une valeur approchée de J. Montrer que $J > 0$.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence et l'unicité de $(x_{k,n})_{1\leq k\leq n}$ tel que $\forall k,\ x_k \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $f(x_{k,n}) = \frac{k}{n}M$.

b) On pose $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(x_{k,n})^2$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^{\pi/2}(\sin u)^3\, du = \frac{2}{3}$.

Exercice F

On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_0(x) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, 1]$, $f_{n+1}(x) = 2\int_0^x \sqrt{f_n(t)}\, dt$.

1) Calculer f_1 et f_2.

2) Montrer que f_n est de la forme $f_n(x) = a_n x^{b_n}$. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

3) Exprimer b_n en fonction de n. Déterminer la limite de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4) Écrire en PYTHON une fonction `a(n)` donnant a_n. Représenter les vingt premiers termes de la suite.

5) Représenter sur un même schéma les graphes de f_n sur $[0, 1]$ pour n pair compris entre 2 et 20.

6) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f à déterminer.

Exercice G

1) Répresenter avec PYTHON sur $[0, 20]$ la solution F de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$(E) : xy'' + y' + xy = 0 \text{ avec les conditions initiales } F(0) = 1 \text{ et } F'(0) = 0$$

2) On considère la fonction de Bessel B définie par $B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{1}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

Tracer le graphe de B sur $[0, 20]$. Comparer avec le graphe de F. Conjecture ?

3) Démontrer la conjecture.

Epreuves orales Math-info. Probabilités

Exercice A

1) Soit $r \geq 2$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{0, 1, 2, ..., r\}$. Calculer $E(X)$.

Donner une expression de sa fonction génératrice.

2) Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $\{0, 1, 2, ..., r\}$.

On pose $S_{r,n} = X_1 + ... + X_n$. Déterminer la fonction génératrice de $S_{r,n}$.

3) Ecrire une fonction qui étant donnés r et n représente la loi de $S_{r,n}$, c'est-à-dire $(S_{r,n} = k))_{0 \leq k \leq rn}$.

Représenter la loi de $S_{3,5}$.

4) a) Ecrire une fonction permettant de calculer la somme des k premiers coefficients d'un polynôme.

b) Soit $\lambda \in [0, 1]$. On pose $u_{p,n} = P(S_{r,n} \leq \lambda rn)$. Pour $\lambda \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$, calculer $(u_{3,2k})_{1 \leq k \leq 5}$.

c) On fixe $r \in \mathbb{N}^*$. Proposer une conjecture pour $\lim_{n \to +\infty} u_{r,n}$ selon la valeur de λ Démontrer le résultat.

Exercice B

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables de Bernoulli i.i.d. de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On note Y la longueur de la première série de 0 consécutifs ou de 1 consécutifs.

On note Z la longueur de la deuxième série de 1 consécutifs ou de 0 consécutifs.

Par exemple, si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, ...)$, on a $Y = 3$ et $Z = 5$.

Note Bene : Comme $0 < p < 1$, $P(Y = +\infty) = 0$, donc Z est bien définie, et Y et Z sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1) Ecrire un programme en PYTHON permettant d'évaluer le couple $(E(Y), E(Z))$.

2) Donner la loi de Y. Montrer que $E(Y) = \dfrac{q}{p} + \dfrac{p}{q}$, et justifier brièvement que $E(Y) \geq 2$.

3) Donner la loi conjointe de (Y, Z). En déduire que $E(Z) = 2$.

Exercice C

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d. et N une v.a. entière indépendante de $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$. On pose $Y = \sum_{k=1}^{N} X_k$.

1) On prend $X = X_1 \sim \mathcal{B}(50, \frac{1}{50})$ et $N \sim \mathcal{P}(\frac{1}{10})$.

a) Définir une fonction permettant de calculer Y.

b) Réaliser 10 fois de suite une série de 1000 expériences et évaluer la moyenne et l'écart-type de Y.

2) On revient au cas général. On suppose X_1 et N de moments d'ordre 2 finis.

a) Exprimer G_Y en fonction de G_X et G_N. En déduire $E(Y)$.

b) On prend $X_1 \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice D

Soit un réel λ vérifiant $0 < \lambda < 1$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x > 0$ tel que $e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} = \lambda$. On le note x_n.

b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2) (♣) On prend $\lambda = \frac{1}{2}$. Avec PYTHON, représenter $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{1\leq n\leq 20}$.

3) a) En utilisant une v.a. de loi de Poisson $\mathcal{P}(an)$, montrer que $\lim_{n\to+\infty} e^{-an} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(an)^k}{k!} = \begin{cases} 0 \text{ si } a > 1 \\ 1 \text{ si } a < 1 \end{cases}$

b) En déduire que $x_n \sim n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice E

1) On considère la matrice réelle $M(a,b) = \begin{pmatrix} 3a-2b & -6a+6b+3 \\ a-b & -2a+3b+1 \end{pmatrix}$.

On définit l'écart par $e(a,b) = |\lambda - \mu|$, où λ et μ sont les valeurs propres complexes de $M(a,b)$.

Définir la fonction `ecart` qui étant donnés a et b renvoie $e(a,b)$.

2) Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

a) Ecrire une fonction `hasard` qui étant donné un réel $p \in]0,1[$ réalise la simulation de 500 valeurs (a,b) du couple de variables aléatoires (A,B) et renvoie le nombre de fois où $e(a,b) \geq \frac{1}{100}$.

b) Pour $p = \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \ldots, \frac{99}{100}$, construire un graphique représentant les points $M_p = \left(p, \frac{1}{500}\texttt{hasard}(p)\right)$.

c) Sur le même graphe, tracer la courbe de la fonction $p \longmapsto \dfrac{2-2p+p^2}{2-p}$ définie sur $[0,1]$.

3) a) Montrer (*ou bien admettre*) que la matrice $M(a,b)$ est semblable à $N(a,b) = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

b) A quelle condition la matrice $N(a,b)$ est-elle diagonalisable ?

c) Calculer la probabilité pour que $M(A,B)$ soit diagonalisable.

Exercice F

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. Le premier joueur tire des boules de l'urne *sans remise*. Il s'arrête lorsqu'il obtient la boule de numéro n. On note X le nombre de tirages effectués.

1) Ecrire en PYTHON une fonction simulant X.

2) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

Exercice G

1) Une urne contient trois boules distinctes. On effectue des tirages avec remise. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note Y_i la variable aléatoire telle que $Y_i = k$ si l'on a, pour la première fois, i boules distinctes dans les k premiers tirages. On a $Y_1 = 1$.

Ecrire une fonction `test(i)` de paramètre $i \in \{1,2,3\}$ renvoie Y_i. On limitera le nombre de tirages à 30.

2) Ecrire une fonction `repartition(i,n)` donnant la répartition sur n expériences (on limitera à $k \leq 30$).

3) Calculer $P(Y_3 = n+k, Y_2 = n)$ pour $n \geq 1$ et $k \geq 1$. En déduire la loi de $Y_3 - Y_2$.

Epreuves orales Math-info. Exos supplémentaires

Exercice A

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. de Rademacher : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(\varepsilon_k = +1) = P(\varepsilon_k = -1) = \frac{1}{2}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\varepsilon_k$.

1) Justifier le fait que $P(X_n \in [-1, 1]) = 1$.

2) Soit $(X_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes où chaque $X_{n,k}$ suit la même loi que X_n.

Soient $\varepsilon > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} P\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\cos(tX_{n,k}) - E(\cos(tX_n))\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

3) Ecrire en Python un programme modélisant les variables aléatoires $Y_{n,N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\cos(tX_{n,k})$

Utiliser cette fonction avec $N = 1000$ pour évaluer $E(\cos(tX_n))$ où $n \in \{3, 4, ..., 10\}$.

4) On pose $\phi_{X_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\; t \longmapsto E(\exp(itX_n))$.Montrer mathématiquement que $\phi_{X_n}(t) = \dfrac{1}{2^n}\dfrac{\sin(t)}{\sin(t/2^n)}$.

Exercice B

Pour $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on définit la matrice $A \otimes B$ d'ordre np par

$$A \otimes B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{C})$$

1) Définir une fonction `tensoriel(A,B)` qui étant données deux matrices carrées A et B d'ordre 2 renvoie $A \otimes B$.

Nota Bene : On pourra se limiter éventuellement au cas $n = p = 2$ (utilisé dans la suite).

Remarque : On pourra évntuellement utiliser la fonction `concatene` qui permet de définir des matrices par blocs.

2) On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer avec Python si les matrices $A \otimes B$ et $A \otimes B'$ sont diagonalisables.

3) Montrer que $\otimes$ est bilinéaire. Calculer $\mathrm{tr}(A \otimes B)$.

4) a) Montrer que pour tous $(A, A') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $(B, B') \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})^2$, on a $(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB')$.

Qu'en déduire sur $A \otimes B$ si les matrices A et B sont inversibles ?

b) Exprimer le rang de $(A \otimes B)$ en fonction de $r = \mathrm{rg}\, A$ et $s = \mathrm{rg}\, B$.

6) Montrer que si A et B sont diagonalisables, alors $A \otimes B$ est diagonalisable.

7) Réciproquement, on suppose que $A \otimes B$ est diagonalisable, avec A et B non nulles.

a) Montrer que $A \otimes B$ n'est pas la matrice nulle. En déduire que $A \otimes B$ et A ne sont pas nilpotentes.

b) On suppose A triangulaire supérieure. Montrer que B est diagonalisable.

On admettra ici que si une matrice triangulaire par blocs est diagonalisable, ses blocs diagonaux le sont aussi.

c) Conclure dans le cas général. La propriété reste-t-elle vraie pour les matrices réelles ?