Epreuve orale Math-info de Centrale. Exemples d'oraux.

Commencer par charger les bibliothèques classiques :

```
from math import * ; from scipy import *
import numpy as np   # on peut ajouter : from numpy import *  pour éviter np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice A. Equations différentielles

1) Répresenter avec PYTHON sur $[0,20]$ la solution F de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$(E) : xy'' + y' + xy = 0 \text{ avec les conditions initiales } F(0) = 1 \text{ et } F'(0) = 0$$

2) On considère la fonction de Bessel B définie par $B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{1}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

On approche $B(x)$ par $B_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \dfrac{1}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

Trouver numériquement N tel que $\forall x \in [0,20],\ |B(x) - B_N(x)| < 10^{-12}$.

Tracer le graphe de B_N sur $[0,20]$. Vérifier graphiquement que $B = F$.

Exercice B. Suite définie implicitement

On considère $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} - 1$.

1) Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel positif x_n tel que $f_n(x_n) = 0$.

2) Représenter $(x_n)_{1 \leq n \leq 50}$.

3) Prouver que $(x_n)_{n \geq 1}$ est strictement monotone et converge vers un réel L dont on donnera une estimation.

4) Justifier qu'il existe $\alpha \in [0,1[$ tel que $\forall n \geq 2,\ x_n \leq \alpha$.

Remarque : On a $\forall x \in [0,1[,\ \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$, où $f(x) = -\ln(1-x) - 1$.

On peut déduire des questions précédentes que L est l'unique zéro de f.

Exercice C. Diagonalisabilité de matrices aléatoires

On note M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & X-Y \\ X+Y & 0 \end{pmatrix}$, avec X et Y v.a.r. i.i.d. de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1) Estimer avec PYTHON la probabilité r que M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On prendra ici $p = \frac{1}{2}$.

Remarque : Pour tester la non-diagonalisabilité, vérifier que la matrice renvoyée par `eig(M)[1]` n'est pas inversible (les vecteurs propres ne forment pas une base) : vérifier que la valeur approchée du déterminant est très proche de 0.

2) Montrer que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ssi $X \neq Y$. En déduire la probabilité.

3) Montrer que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ssi $X > Y$. En déduire la probabilité.

Exercice D. Etude d'une fonction définie par une intégrale

On considère $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\exp(-tx)}{1+t}\, dt$.

Tracer la courbe représentative de F à l'aide de PYTHON.

Que peut-on conjecturer sur le domaine de définition, les variations et limites de F ?

Questions math supplémentaires : (i) Montrer que $F(x) \sim -\ln x$ lorsque $x \to 0$.

(ii) Montrer que F vérifie une équation différentielle d'ordre 1 et est de classe C^∞.

Exercice E. Loi multinomiale

Soient un entier $r \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, ..., X_n$ des v.a. indépendantes de loi uniforme sur $\{0, 1, ..., r\}$.

On pose $S_{r,n} = X_1 + ... + X_n$.

1) Expliciter mathématiquement $E(S_{r,n})$ et le polynôme générateur $G_{S_{r,n}}$ de $S_{r,n}$.

2) Représenter la loi de $S_{r,n}$ de deux façons :

a) En utilisant les opérations Python sur les polynômes pour calculer les coefficients de $G_{S_{r,n}}$.

b) En utilisant une fonction aléatoire simulant $S_{r,n}$, puis de représenter la loi en utilisant un nombre important de tests (à l'aide d'un tableau d'occurrences des valeurs de $S_{r,n}$ sur $[\![0, nr]\!]$).

3) a) Ecrire une fonction permettant de calculer la somme des k premiers coefficients d'un polynôme.

b) Soit $\lambda \in [0, 1]$. On pose $u_{r,n}(\lambda) = P(S_{r,n} \leq \lambda rn)$. Calculer $u_{3,20}(\lambda)$ pour $\lambda \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1\}$.

Proposer une conjecture pour $\lim_{n\to+\infty} u_{r,n}(\lambda)$ selon la valeur de λ.

c) Démontrer mathématiquement le résultat.

Exercice F. Etude d'une matrice

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $C_n = \binom{2n}{n}$.et $H_n = (C_{i+j})_{0\leq i\leq n, 0\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice H_n est diagonalisable.

2) Écrire en Python un programme renvoyant H_n. Pour $n \in \{1, 2, 3\}$, calculer le déterminant de H_n et vérifier que les valeurs propres de H_n sont strictement positives.

3) Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose $P_i = (1 + X)^{2i}$. Exprimer le coefficient de X^{i+j} dans P_iP_j en fonction de C_{i+j}.

Remarque : On peut en déduire une matrice $Q_n \in \mathcal{M}_{n+1,(2n+2)}(\mathbb{R})$ de rang $n+1$ inversible telle que $H_n = Q_n^TQ_n$ ce qui prouve que H_n est bien symétrique définie positive.

Exercice E (suite)

4) Soit $f \in C^1([0, r], \mathbb{R})$. On pose $\omega_n(f) = E\left(f\left(\dfrac{S_{r,n}}{n}\right)\right)$.

a) Ecrire une fonction Python ayant pour arguments d'entrée f, r et n et renvoyant $\omega_n(f)$.

b) Tester la fonction précédente pour $f_\alpha : t \longmapsto t^\alpha$ et $r = 3$ et $n = 15$ avec $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$. Comparer $\omega_n(f)$ et $f_\alpha\left(E\left(\dfrac{S_{r,n}}{n}\right)\right) = f_\alpha\left(\dfrac{r}{2}\right)$. Conjecture ?

c) Justifier que f est lipschitzienne. Montrer : $\lim_{n\to+\infty} E(\left|\frac{1}{n}S_{r,n} - \mu_r\right|) = 0$, où $\mu_r = \frac{1}{n}E(S_{r,n}) = \frac{1}{2}r$.

d) Justifier la conjecture de b).