Interrogation d'informatique n°9. Structure d'Union-Find. *Barème sur 22 pts*

Il s'agit de gérer efficacement **les partitions** de $[\![n]\!] = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$. Une partition de E est une famille de parties de E non vides, deux à deux disjointes et dont la réunion est E. On les appelle **les classes** de la partition. L'objectif est de construire une structure permettant d'effectuer les opérations suivantes :

- déterminer si deux éléments sont dans la même classe (FIND)

- modifier la relation pour fusionner les classes de deux éléments (UNION).

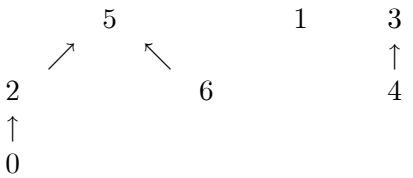
Une partition en k groupes d'un ensemble $E = [\![n]\!]$ est une famille de k parties (appelées classes) de E disjointes non vides et dont l'union vaut E. Par exemple, $\mathcal{P} = (\{1, 2, 5\}, \{0, 3\}, \{4\})$ est une partition de E_6.

Le principe de cette structure de données est de structurer les éléments de chaque groupe par une relation filiale (c'est-à-dire un arbre) : **chaque élément a un unique parent choisi dans le groupe et l'unique élément du groupe qui est son propre parent est appelé le représentant du groupe (il correspond à la racine de l'arbre)**. Autrement dit, on représente la partition par une famille d'arbres (appelée forêt) dont les racines sont les représentants des classes.

Partie I. Implémentation naïve

Pour coder cette structure, on utilise un tableau `parent` de longueur n où la case `parent[i]` contient le numéro du parent de i.

Par exemple, `parent = [2,1,5,3,3,5,5]` code la partition de $[\![7]\!]$ en les classes $\{0, 2, 5, 6\}$, $\{1\}$ et $\{3, 4\}$.



Les opérations fondamentales sur les partitions sont :

- FIND : Déterminer si deux éléments appartiennent à la même classe

- UNION : Fusionner deux classes pour n'en faire plus qu'une (ce qui modifie la partition).

1) [1 pt] Écrire une fonction `creerPartitionEnSingletons(n)` qui crée et renvoie un tableau `parent` à n éléments codant la partition de $[[n]]$ en n singletons (= groupes à un seul élément).

2) [2.5 pt] Écrire une fonction `representant(parent,i)` qui utilise le tableau `parent` pour trouver et renvoyer l'indice du représentant du groupe auquel appartient i dans la partition encodée par le tableau `parent`.

Quelle est la complexité dans le pire cas en fonction du nombre total n d'éléments ?

Donner un exemple de tableau `parent` qui atteigne cette complexité dans le pire cas.

3) [1 pt] Écrire une fonction `find(parent,i,j)` qui renvoie True ssi i et j appartiennent à la même classe.

Pour réaliser la fusion de deux groupes désignés par l'un de leurs éléments i et j respectivement, on applique l'algorithme suivant :

Etape 1 : Calculer les représentants p et q des deux groupes contenant i et j respectivement.

Etape 2 : Faire `parent[p] = q`.

4) [1 pt] Écrire une procédure `fusion(parent,i,j)` qui modifie le tableau `parent` pour fusionner les deux groupes contenant respectivement i et j.

5) [2 pts] Un exemple. On part de la partition en en n singletons de E, et on effectue :

```
for i in range(1,n) :   fusion(parent, 0, i)
```

Préciser la partition obtenue finalement et préciser l'ordre de grandeur du nombre d'opérations élémentaires qui sont effectuées lors de l'exécution de ces instructions.

6) [2 pts] Écrire une fonction `listeDesGroupes(parent)` qui renvoie la liste des différents groupes codés par le tableau `parent` sous la forme d'une liste des classes, les éléments de chaque classe étant classés par ordre croissant.

Par exemple, `listeDesGroupes([2,1,2,0,1])` renvoie `[[0,2,3],[1,4]]`.

Suggestion : Créer un dictionnaire L dont les clés sont les représentants et la valeur $L[i]$ de tout représentant i est la liste des éléments de la classe de i.

Partie II. Amélioration de la structure par équilibrage des arbres

La fusion de deux classes revient à fusionner deux arbres. L'idée est de fusionner ces deux arbres de sorte à minimiser la hauteur de l'arbre obtenu.

On considère donc un tableau supplémentaire `rang` qui donne **pour chaque représentant** la longueur maximale d'un chemin (autrement dit la hauteur de l'arbre représentant la classe).

Exemple : `parent = [2,1,5,3,3,5,5]` et `rang = [*,0,*,1,*,2,*]` représentent la partition de $[\![7]\!]$ en les classes $\{0,2,5,6\}$, $\{1\}$ et $\{3,4\}$ dont les représentants sont 1, 3 et 5, et les valeurs du tableau `rang` en positions 0, 2, 4, 6 ne sont pas significatives (leurs valeurs n'ont pas de rôle dans l'algorithme).

7) [2 pts] Écrire une nouvelle procédure `fusion(parent,rang,i,j)` qui fusionnent (si elles sont distinctes) les classes auxquelles appartiennent i et j, en prenant comme représentant de la réunion des deux classes celui des deux représentants qui a le rang maximum. Lorsque les deux représentants ont le même rang, on choisit arbitrairement l'un des deux comme représentant de la réunion.

8) [2 pts] On appelle rang d'une classe le rang de son représentant.

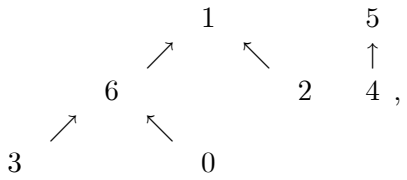
Montrer que `fusion` préserve l'invariant : < toute classe de rang k admet au moins 2^k éléments >.

9) [1.5 pt] Considérons une partition de $[\![n]\!]$ construite en partant de la partition en singletons et effectuant ensuite des appels successifs à la fonction `fusion` définie ci-dessus. Montrer qu'alors, la fonction permettant de déterminer le représentant d'un élément est de complexité $O(\log n)$.

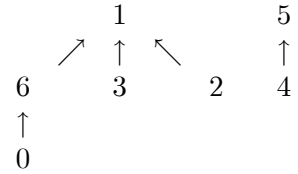
Partie III. Amélioration de la structure par compression des arbres

Pour remédier aux mauvaises performances de la structure précédente, on pourrait envisager une structure où le parent de chaque élément est le représentant de sa classe. Cette structure permettrait de résoudre FIND en temps $O(1)$, mais hélas, le cout de UNION resterait trop élevé, car il faudrait à chaque fusion modifier la totalité des parents de l'une des deux classes fusionnées.

Une astuce pour résoudre ces différents problèmes consiste à compresser la relation filiale après chaque appel a la fonction `representant(parent,i)`. L'opération de compression consiste a faire la chose suivante : si p est le résultat de l'appel à la fonction `representant(parent,i)`, cette fonction modifie **en même temps** le tableau `parent` de façon à ce que chaque ancêtre (c'est-à-dire le parent du parent . . . du parent) de i, dont i lui-même, ait pour parent direct p. Ainsi, un appel à `representant(parent,i)` renvoie le représentant de i et modifie egalement le tableau parent.

Par exemple, si `parent` est associé à la forêt 

,

`representant(parent,3)` renvoie `1` et modifie `parent` en la forêt 

10) [2 pts] Modifier votre fonction `representant(parent,i)` pour qu'elle modifie le tableau `parent` pour faire pointer directement tous les ancêtres de i vers le représentant de i une fois qu'il a été trouvé.

En quoi cette optimisation de la structure filiale peut-elle être considérée comme gratuite du point de vue de la complexité ?

11) [2 pts] On reprend la fonction `listeDesGroupes(parent)` de la question 6).

Proposer une fonction de complexité linéaire $O(n)$ et justifier la complexité obtenue.

Partie IV. Exemple d'utilisation

On donne ici un exemple d'utilisation.

On se donne un graphe non-orienté $G = (S, A)$. On cherche un sous-ensemble d'arêtes $B \subset A$ de cardinal maximal de sorte que le sous-graphe $H = (S, B)$ soit acyclique, c'est-à-dire sans cycle (ce qui revient à dire que H est la réunion d'arbres disjoints).

Si tel est le cas, les composantes connexes de H sont les mêmes que celles de G, et H est la réunion d'arbres associés à chaque des composantes connexes de H. Il s'agit donc d'un algorithme permettant de déterminer les composantes connexes de G.

On suppose :

- les sommets de S numérotés de 0 à $n-1$, donc on peut supposer $S = [\![n]\!] = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$

- une arête non orientée (x, y) est stockée par le couple (x, y), avec $x < y$

- l'ensemble des arêtes de G est donné par la liste des couples $(x, y) \in A$.

On suppose que chaque arête $(x, y) \in A$ n'apparaît qu'une fois dans cette liste.

Par exemple, si $n = 5$ et $A = [(0, 1), (0, 2), (1, 2), (3, 4), (3, 5)]$, une solution est $[(0, 1), (0, 2), (3, 4), (3, 5)]$.

On va utiliser UNION-FIND pour coder la partition associée à B (c'est-à-dire les composantes connexes de H). Autrement dit, on utilisera les fonctions `representant` et `fusion`.

Par exemple, au départ, si $B = \emptyset$, la partition est composée des n singletons. La partition définie par les composantes connexes de B est comme précédemment codée par le tableau `parent`.

12) [1 pt] Écrire une fonction `cycle(parent,a)` qui étant donnée un tableau `parent` représentant la partition définie par B et une arête $a \notin B$ renvoie `True` ssi le graphe $(S, B \cup \{a\})$ admet un cycle.

13) [1.5 pt] Écrire une fonction `foretCouvrante(n,A)`qui étant donnés un entier n, une liste d'arêtes A, renvoie la liste B souhaitée (qui est la liste des arêtes de H). On utilisera le tableau `parent.`

Préciser la complexité en fonction de n et $m = \operatorname{card} A$, en supposant ici que les arbres obtenus ont tous une hauteur en $O(\log n)$.