$\boxed{\textbf{Formules algébriques}}$

<u>Notations :</u> $\sum_{k=1}^{n} a_k$ désigne $a_1 + a_2 + ... + a_n$ et $\prod_{k=1}^{n} a_k$ désigne $a_1 a_2 ... a_n$. On pose $\forall x \in \mathbb{C}$, $x^0 = 1$.

◀ **Coefficients du binôme** : On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, ..., n\}$ $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n+1-k)}{k!}}$

Par convention, pour $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0, 1, ..., n\}$, on pose $\binom{n}{k} = 0$.

Propriétés : $\boxed{\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \quad , \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad , \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$

Cas particuliers : $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{1}{2} n(n-1)$.

◀ **Formule du binôme.** $\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$. *Cas particulier* : $\boxed{(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k}$

◀ **Sommes et produits simples.** $\boxed{\sum_{k=p}^{q} (u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p}$ et $\prod_{k=p}^{q} \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_{q+1}}{v_p}$.

◀ **Sommes géométriques.** $\boxed{\text{Si } x \neq 1, \text{ alors } \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}}$. *Remarque* : Si $|x| < 1$, il vaut mieux écrire $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Remarque importante : Pour calculer $\sum_{k=p}^{q} x^k$, on utilise $\sum_{k=p}^{q} x^k = x^p \sum_{k=0}^{q-p} x^k$.

Formule plus générale : $\boxed{x^n - y^n = (x-y)(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k})}$ (le cas précédent correspond à $y = 1$).

◀ **Relations entre coefficients et racines d'un polynôme de degré 2 ou 3.**

$(X-a)(X-b) = X^2 - (a+b)X + ab$ et $(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc$.

Exemple : Si on note a et b les racines du polynôme $P(X) = uX^2 + vX + w$, avec $u \neq 0$, alors $a + b = -\frac{v}{u}$ et $ab = \frac{w}{u}$.

◀ **Formule du petit Gauss** : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)}$

$\boxed{\textbf{Formules trigonométriques}}$

◀ **Trigonométrie.** $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ est défini pour $x \neq \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$.

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x \\ \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases} \quad \begin{cases} \tan(\pi + x) = \tan x \\ \tan(-x) = -\tan x \end{cases}$$

$\cos a = \cos b \Leftrightarrow a = b$ ou $-b$ $[2\pi]$, $\sin a = \sin b \Leftrightarrow a = b$ ou $\pi - b$ $[2\pi]$, $\tan a = \tan b \Leftrightarrow a = b$ $[\pi]$.

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

$2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, $2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

$\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 2(\cos x)^2 - 1 = 1 - 2(\sin x)^2$, $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.

$(\cos x)^2 = \frac{1+\cos(2x)}{2}$, $(\sin x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

Si $x \neq \pi$ $[2\pi]$ et $t = \tan(\frac{x}{2})$, alors $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$.

$\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$, $\tan'(x) = 1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$.

◀ **Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe :** $a + ib = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Si ρ n'est pas nul, θ est défini modulo 2π par les relations $\cos \theta = \frac{a}{\rho}$ et $\sin \theta = \frac{b}{\rho}$.

En effet, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifie $x^2 + y^2 = 1$, il existe un unique θ défini modulo 2π tel que $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$.

◀ **Important :** $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t - \varphi)$, où φ est défini par $(\cos \varphi, \sin \varphi) = (\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$.

◀ **Formule d'Euler** : $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$, $\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$.

La formule d'Euler permet de linéariser, c'est-à-dire d'exprimer $\cos^p \theta \sin^q \theta$ en fonction des $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$.

◀ **Formules à connaître** : $e^{i\theta} + 1 = 2 \cos(\frac{\theta}{2}) e^{i\theta/2}$, $e^{i\theta} - 1 = 2i \sin(\frac{\theta}{2}) e^{i\theta/2}$.

◀ **Formule de Moivre** : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

La formule de Moivre permet d'exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction des $\cos^p \theta \sin^q \theta$.

$\boxed{\textbf{Fonctions usuelles}}$

1) Fonctions usuelles

a) *Fonctions puissances, fonctions exponentielle, fonctions logarithmes*

b) *Fonctions circulaires* cos, sin, tan, cotan

Paramétrisation du cercle unité $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$ par $\theta \longmapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$.

On a $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$ (cf dérivée de $x \longmapsto e^{ix}$), $\forall x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $\tan' = 1 + \tan^2$.

c) *Fonctions circulaires réciproques* arcsin, arccos et arctan

On a : $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Et $\forall x \in]-1, 1[\quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\forall x \in]-1, 1[\quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Les valeurs de arctan en $0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \sqrt{3}, +\infty$ valent respectivement $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

Important : $\boxed{\arctan x \text{ est l'unique réel } \theta \text{ appartenant à }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ tel que } \tan\theta = x}$.

Ainsi, $\tan(\arctan x) = x$, mais $\arctan(\tan(\alpha))$ est le réel $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ congru à α modulo π.

A connaître : $\forall x \in [-1, 1]$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.

En effet, posons $\theta = \arcsin x$. On a $(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - x^2$, et $\cos\theta \geq 0$ car $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

d) *Fonctions hyperboliques* ch, sh, th

On peut définir $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ et $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

On a $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$, $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$.

Paramétrisation de l'hyperbole $\mathcal{H} : x^2 - y^2 = 1$ par $\theta \longmapsto (\operatorname{ch}\theta, \operatorname{sh}\theta)$ et $\theta \longmapsto (-\operatorname{ch}\theta, \operatorname{sh}\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

2) Trigonométrie

a) *Trigonométrie circulaire et trigonométrie hyperbolique*

Principe : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\operatorname{ch}(z) = \cos(iz)$, $\operatorname{sh}(z) = i\sin(iz)$ et $\operatorname{th}(z) = i\tan(z)$.

Les formules de trigonométrie circulaires sont vraies sur $\mathbb{C}$ (propriétés algébriques sur les e^{iz}). Donc on obtient les formules de trigonométrie hyperbolique en modifiant le signe pour tout produit de deux sin ou tan (car $i^2 = -1$).

D'où :

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$
$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$	$\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$
$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$	$\operatorname{sh}(a + b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$
$1 + \cos x = 2\cos^2(\frac{1}{2}x)$	$1 + \operatorname{ch} x = 2\operatorname{ch}^2(\frac{1}{2}x)$
$1 - \cos x = 2\sin^2(\frac{1}{2}x)$	$(\operatorname{ch} x) - 1 = 2\operatorname{sh}^2(\frac{1}{2}x)$
Avec $t = \tan(\frac{1}{2}x)$, $(\cos x, \sin x) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$	Avec $t = \operatorname{th}(\frac{1}{2}x)$, $(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x) = \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\right)$

b) *Trigonométrie réciproque*

Les formules sont obtenues en inversant les formules de trigonométrie.

On a $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta)$ donne $\forall x \in [-1, 1]$, $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

On a $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{1}{\tan\theta}$ donne $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ si $x > 0$ et $-\dfrac{\pi}{2}$ si $x < 0$.

Et $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ donne $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\dfrac{x + y}{1 - xy}\right)$ pour x et $y \in]-1, 1[$.