

Différents types de convergence en probabilités

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r définie sur un même univers probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) .

Alors la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut converger vers X de plusieurs façons différentes :

(i) *Convergence L^2* : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|X_n - X\|_2 = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} E((X_n - X)^2) = 0$

(ii) *Convergence L^1* : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|X_n - X\|_1 = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|X_n - X|) = 0$

(iii) *Convergence en probabilité* : $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$.

1) a) Montrer que (i) implique (ii).

b) Montrer que (ii) implique (iii).

2) On considère $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la mesure $P(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}}$, et $X_n = 2^{n+1} \cdot 1_{\{n\}}$.

Pour quels types de convergence définis ci-dessus la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle vers $X = \tilde{0}$?

3) On suppose désormais que $X = \mu$ variable aléatoire constante :

(iv) *Convergence en loi* : Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et continue, $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(f(X_n)) = E(f(\mu))$.

(v) Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne, $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(f(X_n)) = E(f(\mu))$.

a) Montrer que (ii) implique (v).

b) Montrer que (iii) implique (iv).

Corrigé

1) a) Résulte de l'inégalité de Cauchy-schwarz : $E(|X_n - X|)^2 \leq E((X_n - X)^2) \rightarrow 0$.

b) Résulte de l'inégalité de Markov :

Comme $|X_n - X| \geq 0$, alors $P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{E(|X_n - X|)}{\varepsilon} \rightarrow 0$.

2) On a $E(X_n) = 2^{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$ et $E(X_n^2) = (2^{n+1})^2 \frac{1}{2^{n+1}} = 2^{n+1}$.

D'autre part, $P(|X_n| > \varepsilon)$ vaut 0 si $\frac{1}{2^{n+1}} < \varepsilon$ et vaut 1 sinon, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0$.

On en déduit que (iii) est vérifiée, mais que (i) et (ii) ne le sont pas.

3) a) On suppose f lipschitzienne de rapport k .

On a $|E(f(X_n)) - E(f(\mu))| \leq E(|f(X_n) - f(\mu)|) \leq k E(|X_n - \mu|) \rightarrow 0$.

b) On pose $M = \sup |f|$. Soit $\varepsilon > 0$.

Comme f est continue en μ , il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |x - \mu| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(\mu)| \leq \varepsilon$.

Posons A_n l'événement $|X_n - \mu| > \alpha$ et Y_n la variable $|f(X_n) - f(X)|$.

Par hypothèse de (iii), on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0$.

Comme $|E(f(X_n)) - E(f(X))| = |E(f(X_n) - f(X))| \leq E(Y_n)$, il suffit de prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n) = 0$.

Or, $\boxed{Y_n = Y_n \cdot 1_{A_n} + Y_n \cdot 1_{\overline{A_n}}}$. On a $E(Y_n \cdot 1_{A_n}) \leq E(2M \cdot 1_{A_n}) = 2M P(A_n)$.

D'autre part, si $|X_n - \mu| \leq \alpha$, alors $Y_n \leq \varepsilon$, donc $E(Y_n \cdot 1_{\overline{A_n}}) \leq \varepsilon P(\overline{A_n}) \leq \varepsilon$.

On en déduit que $E(Y_n) \leq 2M P(A_n) + \varepsilon \leq 2\varepsilon$ pour n assez grand, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0$.

Comme ε est arbitraire, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n) = 0$.