Interrogation n°22. Commentaires

Exercice A. Matrices symplectiques

1) a) b) La décomposition polaire est à connaître (bien que hors-programme).

Idée : on se ramène au cas où G est diagonale, car par le th spectral, $G = V^T DV$, avec $V \in O_n(\mathbb{R})$.

c) *Idée* : on a nécessairement $U = MS^{-1}$. Il suffit donc de vérifier que $U^T U = I_n$ (ou $UU^T = I_n$).

d) *Idée* : S commutent avec G, donc les sev propres de G sont stables par S.

En se plaçant sur les sev propres de G, on se ramène ainsi au cas où $G = \lambda I$.

L'unique solution de $S^2 = \lambda I$ est $S = \sqrt{\lambda} I$ (car S diagonalisable et $\sqrt{\lambda}$ seule valeur propre).

2) a) *Recommandation* : invoquer la bilinéarité.

b) *Idée* : pour montrer que A est inversible, il vaut mieux ici montrer que $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

c) *Idée* : avec $A^T = -A$, on passe a déterminant pour obtenir $(-1)^n = 1$: bien préciser que $\det A \neq 0$.

Autre méthode : on a $x^T Ax = 0$, d'où on déduit que 0 est l'unique valeur propre réelle de A.

Mais A est inversible, donc A n'a pas de valeur propre réelle, donc n est pair (χ_A sans racine réelle)

3) a) *Idée* : on a $x \in F^\omega \Leftrightarrow \forall y,\, x^T(Ay) = 0$, donc $F^\omega = A(F)^\perp$.

Mais ici, A est inversible et $A(F) = F$, donc $A(F) = F$. *Attention* : $A(F) \subset F$ donne seulement $F^\perp \subset F^\omega$

b) *Idée* : on montre avec soin que $\widetilde{\omega}$ est une forme symplectique sur F.

Autre méthode : On a A endomorphisme antisymétrique inversible.

La restriction de A à F est aussi inversible et antisymétrique, donc par 2) c), $\dim F$ est paire.

Variante : Dans une BON adaptée à $F \oplus F^\perp$, $U^T AU = \left(\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline O & C \end{array}\right)$, avec B et C antisymétrique inversibles.

4) a) *Idée* : si $\forall (x,y)$, $x^T Ay = x^T By$, alors $A = B$, car $e_i^T Ae_j = a_{ij}$.

b) *Idée* : penser utiliser $M^T AM = M$, d'où $(\det M)^2 = 1$.

5) b) *Idée* : - $S \in \Sigma_n$ s'écrit $SAS = A$. Donc $SX = \lambda X \Rightarrow S(AX) = \lambda^{-1}(AX)$, donc $A(E_\lambda) \subset E_{1/\lambda}$.

Faire attention pour pouvoir conclure $A(E_\lambda) = E_{1/\lambda}$ Comme λ et λ^{-1} jouent un rôle symétrique, il suffit de prouver que $\dim E_\lambda \leq \dim E_{1/\lambda}$, ce qui résulte de A inversible.

- pour la réciproque; il suffit d'utiliser le th spectral, car SAS et S coïncident sur tous les E_λ pour $\lambda > 0$.

6) a) *Idée* : $U \in \Sigma_n$ s'écrit $U^T AU = A$, c'est-à-dire $AU = UA$, c'est-à-dire A et U commutent.

Donc $F = E_{-12}$ sev propre de U est stable par A, donc on conclut par 2) c).

b) *Idée* : on montre ensuite que $\det V > 0$, car 1 seule valeur propre réelle de V.

Exercice B1. Polynômes réels scindés

1) a) ϕ linéaire en dimension finie. *Variante* : ϕ est une fonction des coefficients de P.

Attention : la convergence simple n'est pas assoicée à une norme (contrairement à la cv uniforme).

2) a) Pour le sens direct, poser $P(X) = \prod_{k=1}^n (X - x_k)$.

Pour le sens réciproque, invoquer d'Alembert-Gauss : si z racine, alors $\operatorname{Im} z = 0$, donc $z \in \mathbb{R}$.

b) *Attention* : ne pas oublier d'utiliser que E_n est fermé.

Pour les autres conditions, utilsier les fonctions continues $\phi_z : P(X) \longmapsto P(z)$.

3) Avec $P(X) = \prod_{k=1}^n (X - x_k)$ et $x_1 < ... < x_n$, on prend $y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < ... < x_n < y_n$.

4) a) *Idée :* dans tous les cas, utiliser l'inégalité des accroissements finis.

On peut raisonner sur F (cas général) avec $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda}$, ou bien sur P_λ avec les a'_k.

Attention à bien proposer un majorant M valable pour tout $\lambda \in [\lambda_0 - 1, \lambda_0 + 1]$ et $x \in [y_0, y_n]$.

b) *Remarque :* la continuité des $\lambda \longmapsto P_\lambda(y_k)$ permet de justifier l'existence de ε.

Mais ici, on demande (cf énoncé) de construire ε à partir des questions précédentes.

Idée : Si $|P_\lambda(y_k) - P_{\lambda_0}(y_k)| < |P_{\lambda_0}(y_k)|$ inégalité stricte, alors $P_\lambda(y_k)$ et $P_{\lambda_0}(y_k)$ de même signe.

Attention aussi à noter que $\varepsilon \leq 1$ est nécessaire pour appliquer a).

On peut donc prendre $\varepsilon = \min\left(1, \dfrac{1}{2M} \min_{0\leq k\leq n} |P_{\lambda_0}(y_k)|\right)$.

c) *Idée :* TVI + degré de P_λ.

d) *Erratum :* lire $x'_k(\lambda)$ et non une dérivée partielle (x_k est une fonction d'une seule variable !).

Idée : on a $\forall \lambda \in]\lambda_0 - 1, \lambda_0 + 1[$, $P_\lambda(x_k(\lambda)) = F(x_k(\lambda), \lambda) = 0$. On dérive la relation.

e) Pour N change de valeur en λ_0 lorsqu'il existe k tel que $x_k(\lambda_0) = 0$. On étudie alors $x'_k(\lambda_0)$.

Exercice B2. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

1) a) *Idée :* distinguer les cas $|x| < 1$ et $|x| \geq 1$.

Ensuite, utiliser le théorème de comparaisons (sur X^k ou sur $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n |x_n|^k$).

b) Par le th du transfert (à invoquer), $\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{itx_n}$. On pose $f_n(t) = a_n e^{itx_n}$ et on montre :

- Les f_n sont de classe C^p, et $f_n^{(k)}(x) = a_n x_n^k i^k e^{itx_n}$
- pour $k \in [\![0, p]\!]$, $\sum f_n^{(k)}$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$
- $\sum f_n^{(p)}$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$ (il suffirait d'avoir cv normale sur tout segment).

On en déduit que ϕ_X est de classe C^p et $\phi_X^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n i^p x_n^p = i^p E(X^p)$.

c) *Idée :* $\phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)}$. Ainsi, si $X \sim (-X)$, $e^{itX} \sim e^{-itX}$, donc $\phi_X(t) = \phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)}$, donc $\phi_X(t)$ réel.

2) a) *Idée :* il s'agit de montrer que (φ_k) est libre.

Or, les φ_k sont des vecteurs propres de $y \longmapsto y'$ associés à des valeurs propres λ_k distinctes.

Variante : on dérive la relation k fois pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ et on prend $t = 0$: on obtient un système de Van der Monde de paramètres $i\lambda_k$, qui sont bien distincts.

b) *Idée :* on utilise a). On a $\phi_X(t) = \overline{\phi_X(t)} = \phi_{-X}(t)$, donc $\sum_{k=1}^n P(X = x_k) e^{itx_k} = \sum_{k=1}^n P(X = -x_k) e^{itx_k}$.

On obtient donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^n b_k e^{itx_k} = 0$, avec $b_k = P(X = x_k) - P(X = -x_k)$.

Par a), $b_k = 0$, c'est-à-dire X est symétrique.

c) *Remarque :* ici aussi; il n'est pas absolument nécessaire de revenir en cos et sin.

On a $P(X = -n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_X(t)\ e^{-int}\ dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\phi_X(t)\ e^{int}}\ dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_X(t)\ e^{-int}\ dt = P(X = n)$.

3) a) *Idée :* ce calcul de limite se fait avec un $DL_2(0)$ du numérateur, vu le terme en h^2 au dénominateur.

Or, on a ϕ de classe C^2, donc $\phi(h) = \phi(0) + h\phi'(0) + \dfrac{1}{2} h^2 \phi''(0) + \mathfrak{o}\left(h^2\right)$.

On obtient $\lim_{n\to+\infty} f(h) = -\phi''(0)$.

b) *Idée :* utiliser la trigonométrie : $1 - e^{2i\theta} - e^{-2i\theta} = 2 - 2\cos(2\theta) = 4\sin(\theta)^2$.

c) *Idée :* on a bien $\lim_{h\to 0, h\neq 0} \sin^2(hx_n)/h^2 = x_n^2$. On pourrait penser au théorème de la double limite, mais il faudrait alors savoir que $\sum a_n x_n^2$ converge, et c'est ce qu'on veut justement prouver !!!

On est donc obligé de passer par les sommes partielles, en exploitant la positivité de tous les termes.