

Interrogation n°22 bis. Corrigé

Exercice A

0) On a $g(2m) = \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{(m!)^2} 4^{-k} \sim \frac{\sqrt{4m\pi} (2km)^{2k} e^{-2m}}{2m\pi (m)^{2k} e^{-2m}} 4^{-m} = \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$.

Remarque : Pour obtenir la loi de S_n , on se ramène à la loi binomiale :

on a $S_n = \sum_{i=1}^n (2Z_i - 1) = 2 \sum_{i=1}^n Z_i - n$, avec Z_i indépendantes de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Donc $\sum_{i=1}^n Z_i$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, donc $P(S_n = 2k - n) = 2^{-n} \binom{n}{k}$.

b) On a $P(Y_i + Z_i = 1) = P(Y_i = 1, Z_i = 0) + P(Y_i = 0, Z_i = 1) = \frac{1}{2}$.

De même $P(Y_i + Z_i = 1) = \frac{1}{2}$. Idem pour $Y_i - Z_i$. Donc $Y_i + Z_i$ et $Y_i - Z_i$ sont des v.a. de Rademacher.

De plus, $P(Y_i + Z_i = 1, Y_i - Z_i = 1) = P(Y_i = 1, Z_i = 0) = \frac{1}{4} = P(Y_i + Z_i = 1)P(Y_i - Z_i = 1)$.

De même pour les $P(Y_i + Z_i = \varepsilon_i, Y_i - Z_i = \varepsilon'_i)$ pour tout $(\varepsilon_i, \varepsilon'_i) \in \{-1, 1\}^2$.

Comme les X_i sont indépendants, les (Y_i, Z_i) sont indépendantes, donc

$$P(Y_1 + Z_1 = \varepsilon_1, Y_1 - Z_1 = \varepsilon'_1, \dots, Y_n + Z_n = \varepsilon_n, Y_n - Z_n = \varepsilon'_n) = \frac{1}{2^{2n}}.$$

Donc les $2n$ variables aléatoires sont bien mutuellement indépendantes.

$$S_n = \vec{0} \text{ ssi } \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i = 0 \text{ ssi } \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) = 0.$$

On se ramène donc à deux marches aléatoires équilibrées sur \mathbb{Z} , avec deux fois n variables de Rademacher mutuellement indépendantes.

On déduit de 1) a) que $g(2m) = (2^{-2m} \binom{2m}{m})^2 \sim \frac{1}{\pi m}$

1) a) On a $0 \leq g(n) \leq 1$, donc par comparaison, $\sum g(n)t^n$ est de rayon ≥ 1 .

b) Comme les A_n sont des événements disjoints, alors par additivité, $P(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq 1$.

Donc $t \mapsto \sum f(n)t^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$, et ainsi F est définie et continue sur $[-1, 1]$.

2) Si B_n , c'est-à-dire $S_n = 0$, il y a nécessairement premier retour en un $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

De plus, les B_k sont disjoints deux à deux.

Donc les $B_n \cap A_k$, avec $1 \leq k \leq n$, forment une partition de B_n .

Donc par additivité $P(B_n) = \sum_{k=1}^n P(B_n \cap A_k) = \sum_{k=1}^n P(B_n | A_k)P(A_k)$.

Remarque : Il ne s'agit pas stricto sensu de la formule des probabilités totales, car ici, les A_k , où $0 \leq k \leq n$, ne forment pas un système total.

3) On a $P(B_n | A_k) = P(X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_n = 0 | A_k)$.

Comme (X_{k+1}, \dots, X_n) et (X_1, \dots, X_k) sont **indépendantes**, alors :

$$P(X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_n = 0 \mid A_k) = P(X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_n = 0) = g(n - k).$$

4) Les séries entières $\sum g(n)t^n$ et $\sum f(n)t^n$ ont un rayon de convergence ≥ 1 .

On a $\forall t \in [0, 1[$, $G(t) = g(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\sum_{k=1}^n g(n-k)f(k)) t^n$. On a de plus $g(0) = 1$ et $f(0) = 0$.

Donc $G(t) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{k=0}^n g(n-k)f(k)) t^n$.

Par produit de Cauchy des séries entières, on obtient donc $\forall t \in [0, 1[$, $G(t) = 1 + G(t)F(t)$.

5) a) On a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ (union disjointe), donc $p(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = F(1)$.

Comme $F(1) = \lim_{t \rightarrow 1, t < 1} F(t)$, alors $F(1) = \lim_{t \rightarrow 1, t < 1} 1 - \frac{1}{G(t)}$. *Remarque* : On a $\forall t \geq 0$, $G(t) \geq 1$.

On a donc $F(1) = 1$ ssi $\lim_{t \rightarrow 1, t < 1} G(t) = +\infty$.

b) Il suffit de prouver que $\sum g(n)$ converge ssi $\lim_{t \rightarrow 1, t < 1} G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g(n) < +\infty$.

- Si $\sum g(n)$ converge, alors par cv normale sur $[0, 1]$, $\lim_{t \rightarrow 1, t < 1} G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g(n) < +\infty$.

- Montrons que si $\sum g(n)$ diverge vers $+\infty$, alors $\lim_{t \rightarrow 1, t < 1} G(t) = +\infty$.

En effet, G est croissante donc $\lim_{t \rightarrow 1, t < 1} G(t)$ existe (finie ou infinie).

On a par ailleurs pour tout N , $G(t) \geq \sum_{n=0}^N g(n)t^n$, donc $\lim_{t \rightarrow 1, t < 1} G(t) \geq \sum_{n=0}^N g(n) \rightarrow +\infty$ quand $N \rightarrow +\infty$.

6) a) On a pour $r \geq 1$, $p(r, n) = \sum_{k=0}^n p(r-1, k)f(k)$.

b) La probabilité d'un r -ième retour à l'origine vaut $p(E^{(r)}) = \sum_{n=1}^{+\infty} a(r, n)$.

Les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a(r, n)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ sont absolument convergentes.

Par produit de Cauchy des séries, on a donc $p(E^{(r)}) = p(E^{(r-1)})F(1)$. Donc $p(E^{(r)}) = F(1)^r$.

c) Ici, $F(1) = 1$, donc $p(E^{(r)}) = 1$. La probabilité d'une infinité de retours en 0 vaut $\bigcap_{r=0}^{+\infty} E^{(r)}$.

Par continuité décroissante, elle vaut $\lim_{r \rightarrow +\infty} p(E^{(r)}) = 1$.

Remarque : Dans le cas contraire, si $F(1) < 1$, alors $\lim_{r \rightarrow +\infty} p(E^{(r)}) = 0$.

Exercice B

1) La série $\sum na_n z^{n-1}$ converge normalement sur tout compact $D(\rho)$, où $\rho < R$.

On fixe $(x_0, y_0) \in D$. On choisit ρ vérifiant $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} < \rho < R$.

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\sqrt{(|x_0| + \varepsilon)^2 + y_0^2} \leq \rho$.

On considère $\forall x \in]x_0 + \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, $f_n(x) = a_n(x + iy)^n$. On a $f'_n(x) = na_n(x + iy)^{n-1}$

On a $\forall x \in]x_0 + \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, $(x, y) \in D(\rho)$, donc $\sum f'_n$ converge normalement sur $]x_0 + \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.

Par le th de dérivation des séries de fonctions, $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x_0 + iy_0)^n$.

Remarque : On prouve de façon analogue que $\frac{\partial F}{\partial y}$ existe.

On montre ensuite la continuité (comme fonctions de deux variables) comme au 3) :

2) $S(x, y)$ est bien définie par comparaison, car $|f_n(x, y)| \leq M_n = \sup_K |f_n|$.

On utilise la caractérisation séquentielle : Soit $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers (x, y) dans K .

Posons $u_n(k) = f_n(x_k, y_k)$. On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $|u_n(k)| \leq M_n$.

On a $k \mapsto \sum u_n(k)$ converge normalement donc uniformément sur \mathbb{N} .

D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_n(k) = f_n(x, y)$.

Par le théorème de la double limite, $\lim_{k \rightarrow +\infty} (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(k)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} u_n(k)$.

On obtient donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} S(x_k, y_k) = S(x, y)$, et S est continue.

3) On fixe y . On considère $F : x \mapsto \int_0^1 f(t, x, y) dt$. L'application $x \mapsto f(t, x, y)$ est de classe C^1 .

En dominant par $\forall x$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y) \right| \leq \varphi(t) = \sup_{(t,x) \in [0,1]^2} |f(t, x, y)|$,

on en déduit que F est de classe C^1 et $F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y) dt$.

On en déduit que $\frac{\partial J}{\partial x}(x, y)$ existe et vaut $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y) dt$.

Il reste à prouver la continuité de $(x, y) \mapsto \frac{\partial J}{\partial x}(x, y)$: on utilise la caractérisation séquentielle :

Soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers (x, y) dans $[0, 1]^2$. On pose $I_n = \frac{\partial J}{\partial x}(x_n, y_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_n, y_n) dt$.

Par convergence dominée par $\varphi(t) = \sup_{(t,x,y) \in [0,1]^3} |f(t, x, y)|$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y) dt$.

De même pour $\frac{\partial J}{\partial y}(x, y)$. On en déduit que J est de classe C^1 .