

Interrogation n°21 complément. Corrigé

Exercice A

1) Soit $z \in F$. On a $x_0 + tz \in F$, donc $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto f(x_0 + tz) = g(x_0 + tz)$ admet en $t = 0$ un minimum.

Donc $\varphi'(0) = 0$. Mais $\varphi'(t) = \langle \nabla f(x_0 + tz), z \rangle$. Donc $\langle \nabla f(x_0), z \rangle = \varphi'(0) = 0$.

Comme z est arbitraire dans F , alors $\nabla f(x_0)$ est orthogonal à F .

2) Par le cours, on a :

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2}(x - x_0)^T A(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2) \text{ lorsque } x \rightarrow x_0 \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

Lorsque $x \in F$, on a aussi $x - x_0 \in F$, on déduit de a) :

$$g(x) = f(x) = g(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T A(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2) \text{ lorsque } x \rightarrow x_0 \text{ dans } F.$$

3) Par le th spectral, il existe une BON (e_1, \dots, e_n) telle que e_j est un vecteur propre de u de valeur propre λ_j .

Posons $G = \text{Vect}(e_p, \dots, e_n)$. On a $\dim F + \dim G = p + (n - p + 1) > n$, donc $F \cap G \neq \{\vec{0}\}$.

Ainsi, il existe un vecteur non nul $y \in F \cap G$.

Posons $y = \sum_{j=p}^n y_j e_j$. On a alors $y^T A y = \sum_{j=p}^n y_j^2 \lambda_j \leq \lambda_p \|y\|^2$.

4) Il s'agit de prouver que $\lambda_p \geq 0$. Supposons par l'absurde que $\lambda_p < 0$.

Par 3), il existe $y \in F$ tel que $y^T A y < 0$. Alors les $x = x_0 + ty$ appartiennent à G .

Par 2), on a $g(x_0 + ty) = g(x_0) + \frac{1}{2}(y^T A y)t^2 + o(t^2)$ lorsque t tend vers 0.

Ainsi, $g(x_0 + ty) - g(x_0) \sim \frac{1}{2}(y^T A y)t^2$, donc $g(x_0 + ty) < g(x_0)$ pour $t \neq 0$ assez petit.

D'où une contradiction.

Exercice B. Corrigé

1) Par Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n muni du psc, $(\vec{x} | \vec{y})^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$, c'est-à-dire $(\sum_{k=1}^n x_k y_k)^2 \leq (\sum_{k=1}^n x_k^2)(\sum_{k=1}^n y_k^2)$.

En prenant $\vec{x} = (|x_1|, \dots, |x_n|)$ et $\vec{y} = (1, \dots, 1)$, on obtient $(\sum_{i=1}^n |x_i|)^2 \leq n (\sum_{i=1}^n x_i^2)$.

Il y a égalité lorsque tous les $|x_i|$ sont égaux, alors $c_n = n$.

2) a) On a $\frac{b}{A} = m \leq \frac{y_i}{x_i} \leq M = \frac{B}{a}$.

Donc $(y_i - mx_i)(y_i - Mx_i) \leq 0$, c'est-à-dire $(m + M)x_i y_i \geq m M x_i^2 + y_i^2$.

b) La seconde inégalité est l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Montrons la première.

Elle est immédiate si \vec{x} ou \vec{y} est nul. Supposons \vec{x} et \vec{y} non nuls.

- Supposons d'abord $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 1$.

En sommant les inégalités du a), on obtient $\sum_{i=1}^n x_i y_i \geq m M + 1$, d'où $\sum_{i=1}^n x_i y_i \geq \frac{m M + 1}{m + M}$.

- Dans le cas général, on a donc $\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} | \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right)^2 \geq \left(\frac{m M + 1}{m + M} \right)^2$, d'où le résultat.

Remarque : on a toujours $m + M \geq m M + 1$, car $(M - 1)(1 - m) \geq 0$.

c) Supposons $n = 2$. Alors $\vec{x} = (x_1, x_2)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2)$ appartiennent au carré $[a, A]^2$.

Le cosinus de l'angle $\theta = (\vec{x}, \vec{y})$ est minimal lorsque \vec{x} et \vec{y} sont les deux sommets (a, A) et (A, a) .

D'où $\cos \theta \geq \frac{2aA}{a^2 + A^2} = \frac{2M}{1 + M^2}$, et on obtient ainsi $(\vec{x} | \vec{y})^2 \geq \left(\frac{2M}{1 + M^2} \right)^2 \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$.

Remarque : On peut montrer que la majoration est optimale ssi n est pair, en prenant par exemple $(x_1, \dots, x_{n/2}, \dots, x_n) = (a, \dots, a, A, \dots, A)$ et $(y_1, \dots, y_{n/2}, \dots, y_n) = (A, \dots, A, a, \dots, a)$.