Interrogation n°21 complément

Exercice A

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto f(x)$ une fonction de classe C^2. On munit $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$.

On identifie $x \in \mathbb{R}^n$ à la matrice colonne $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En particulier, $\langle x, y\rangle = x^T y$.

Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$. de dimension p.

On note g la restriction de f à F, c'est-à-dire $g : F \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in F$, $g(x) = f(x)$.

On suppose que g atteint son minimum en $x_0 \in F$, c'est-à-dire $\boxed{g(x_0) = \inf\{g(x),\ x \in F\}}$.

1) Montrer que $\boxed{\nabla f(x_0) \in F^\perp}$, c'est-à-dire que $\nabla f(x_0)$ est orthogonal à tout vecteur de F.

Indication : Pour $z \in F$, dériver la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad t \longmapsto f(x_0 + tz)$.

2) On note $\boxed{A = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{1\le i\le n, 1\le j\le n} \text{ la matrice Hessienne de } f \text{ en } x_0}$. Ainsi, on a $A \in S_n(\mathbb{R})$.

Justifier (avec le cours) que $g(x) = g(x_0) + \dfrac{1}{2}(x - x_0)^T A(x - x_0) + \mathfrak{o}\left(\|x - x_0\|^2\right)$ lorsque $x \to x_0$ $\boxed{\text{dans } F}$.

3) On note $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$ les valeurs propres de A.

Montrer qu'il existe un vecteur non nul $y \in F$ tel que $y^T A y \leq \lambda_p \|y\|^2$.

4) Déduire des questions précédentes que A admet au moins p valeurs propres positives ou nulles.

Exercice B

1) Trouver le plus petit réel $c_n > 0$ tel que pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 \leq c_n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

2) Soient des réels strictement positifs a, A, b, B tels que $a \leq A$ et $b \leq B$.

Soient des réels $x_1, ..., x_n$ appartenant à $[a, A]$, et des réels $y_1, ..., y_n$ appartenant à $[b, B]$.

On pose $m = \dfrac{b}{A}$ et $M = \dfrac{B}{a}$.

a) Montrer que, pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, on a : $mMx_i^2 + y_i^2 \leq (m + M)x_i y_i$.

b) Montrer que

$$\left(\frac{mM+1}{m+M}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

Indication : On pourra se ramener au cas où $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$.

c) On reprend b), mais dans le cas particulier où $n = 2$, $a = b$, $A = B$. On a ainsi $M = \dfrac{A}{a}$ et $Mm = 1$.

Faire un schéma dans le plan et retrouver (géométriquement) la valeur obtenue au b). Est-elle optimale ?