

Interrogation n°21 bis. Corrigé

Problème

1) A est symétrique réelle donc diagonalisable.

2) a) A est diagonalisable, non identiquement nulle.

On a $\text{rg } A = 2$, donc 0 est valeur propre simple.

Comme $\text{tr } A = 0$, alors les deux valeurs propres non nulles sont opposées. D'où l'existence de μ .

Autre méthode : On peut calculer le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x(x^2 - 1) - (-1)(-x) = x^3 - 2x, \text{ donc } \mu = \sqrt{2}.$$

$$\text{b) On a } AX = \lambda X \text{ ssi } \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 + x_3 = \lambda x_2 \\ x_2 = \lambda x_3 \end{cases} . \text{ D'où } E_0 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, E_{\sqrt{2}} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_{-\sqrt{2}} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les sev propres sont orthogonaux (car A est symétrique).

Les colonnes de U forment une BON adaptée à $E_0 \oplus E_{-\sqrt{2}} \oplus E_{\sqrt{2}}$.

$$\text{On peut donc prendre } U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Remarque : Il y a } 2^3 \text{ choix possibles pour } U.$$

3) a) On a $AX = \lambda X$, donc $x_2 = \lambda x_1$ et $\forall j \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, $x_{j-1} + x_{j+1} = \lambda x_j$ et $x_{n-1} = \lambda x_n$.

Donc $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|\lambda x_j| \leq 2m$, où $m = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.

Il existe $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_p| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$. Comme X n'est pas nul, $m = |x_p| > 0$.

On obtient donc $|\lambda| m \leq 2m$, c'est-à-dire $|\lambda| \leq 2$.

D'où l'existence de θ , car \cos induit une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

b) On note que les x_i sont entièrement déterminés (par récurrence d'ordre 2) par x_1 .

Donc l'application $E_\lambda \rightarrow \mathbb{R} \quad X \mapsto x_1$ est injective. Ainsi, $\dim E_\lambda \leq 1$, et donc $\dim E_\lambda = 1$.

Variante : On montre que $\text{rg}(A - \lambda I_n) \geq n - 1$, donc par le th du rang, on a $\dim E_\lambda \leq 1$.

c) Ainsi, (x_i) est une suite récurrente d'ordre 2, d'équation caractéristique $1 - \lambda z + z^2 = 0$.

Les racines sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

Premier cas : $\theta \in \{0, \pi\}$.

Si $\theta = 0$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tels que $x_j = (\alpha + \beta j)$. Comme $x_0 = x_{n+1} = 0$, alors $(\alpha, \beta) = (0, 0)$.

Ce qui est absurde car X non nul. De même si $\theta = \pi$, car on obtient $x_j = (\alpha + \beta j)(-1)^j$.

Second cas : $\theta \neq 0, \pi$. Alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tels que $x_j = \alpha e^{ij\theta} + \beta e^{-ij\theta}$.

On a $x_0 = 0$, donc $\alpha + \beta = 0$, donc $x_j = 2\alpha i \sin(j\theta)$.

Comme $x_{n+1} = 0$, alors $2\alpha \sin((n+1)\theta) = 0$. Comme X non nul, α non nul, donc $(n+1)\theta \in \pi\mathbb{Z}$.

Donc il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\lambda = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

c) Par b), $\lambda = 2 \cos(\theta)$, avec $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$ est bien valeur propre de vecteur propre $X = (\sin(j\theta))_{1 \leq j \leq n}$.

On a bien n valeurs propres distinctes, et les sev propres sont bien donc de dimension 1.

Remarque : Si on admet le résultat de la question b) sans l'avoir résolue, on peut quand même déduire le spectre de A : en effet, on sait que A est diagonalisable et que les sev propres sont de dimension 1. Donc A admet n valeurs propres distinctes et ce sont tous les λ trouvés au b) car ils sont justement au nombre de n .

Comme B est diagonalisable, la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée ssi $\text{Sp}(M) \in [-1, 1]$.

La CNS est donc $-1 \leq (1 - 2r) + \lambda_{\min} r$ et $(1 - 2r) + \lambda_{\max} r \leq 1$.

Or, lorsque n décrit \mathbb{N} , $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ décrit $] - 2, 2[$. D'où la CNS : $-1 \leq (1 - 2r) - 2r$, c'est-à-dire $r \leq \frac{1}{2}$.

Exercice A

1) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Immédiat pour $n = 0$, avec $P_n(x) = x$.

Supposons vrai au rang n . On a $\tan^{(n+1)}(x) = \frac{(\cos x)^2 P'_n(\sin x) + (n+1)(\sin x)P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}$.

Donc $P_{n+1}(x) = (1 - x^2)P'_n(x) + (n+1)xP_n(x)$ convient : on a bien $\deg P_{n+1} \leq 1 + \deg P_n \leq n + 2$.

Posons $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$. On a $P_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{n+1} (n+1-k) a_k x^{k+1}$.

Donc P_{n+1} est bien à coefficients entiers naturels.

Autre méthode : Par récurrence forte avec $\tan' = 1 + \tan^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$.

2) Posons $\varphi(x) = \tan(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

On a $\varphi(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0$ et par a), $\varphi^{(n+1)}(x) = \tan^{(n+1)}(x) \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Donc φ est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, et ainsi $\sum_{k=0}^n a_k x^k \leq \tan(x)$.

3) Par 2), la série à termes positifs $\sum a_n x^n$ converge pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Comme les a_n sont positifs, $\sum a_n x^n$ converge absolument) pour tout $x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc $R \geq \frac{\pi}{2}$.

4) $\tan' = 1 + \tan^2$, donc par Leibniz, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$.

On en déduit que $a_1 = 1 + a_0^2$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$.

Par produit de Cauchy, on a $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k})^2 x^n$.

On a aussi $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n$. Donc $f'(x) = 1 + f(x)^2$.

5) On a donc $\frac{f'(x)}{1 + f(x)^2} = 1$, donc $(\arctan f)' = 1$, c'est-à-dire $\arctan f(x) = x + \arctan f(0)$.

Comme $f(0) = 0$, on obtient $f(x) = \tan(x)$ en composant par \tan .

Comme \tan diverge en $\frac{\pi}{2}$, on a nécessairement $R = \frac{\pi}{2}$ (sinon, \tan serait prolongeable par continuité).

Exercice B

1) On fixe $t \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto e^{tx}$ est convexe (car $f''(x) \geq 0$).

Donc le graphe de f sur $[a, b]$ est situé au-dessous de la corde $L : x \mapsto \alpha x + \beta$ de f sur $[a, b]$.

Donc $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq \alpha x + \beta$, où $\begin{cases} \alpha a + \beta = f(a) \\ \alpha b + \beta = f(b) \end{cases}$.

On a donc $E(f(X)) \leq E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta = \beta = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$.

2) On pose $\text{Im } X \subset \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Par le th de transfert, $F(t) = E(e^{tX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{tx_n}$, où $c_n = P(X = x_n)$.

Posons $f_n(t) = c_n e^{tx_n}$. On a $f_n^{(p)}(t) = c_n x_n^p e^{tx_n}$, donc $\sup_{t \in [-\rho, \rho]} |f_n^{(p)}| = c_n M^p e^{\rho M}$, où $M = \max(b, -a)$.

Les séries $\sum f_n^{(p)}$ convergent normalement sur tout segment $[-\rho, \rho]$.

Donc F est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . Et on a $F^{(p)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_n^p e^{tx_n} = E(X^p e^{tX})$. En particulier $F^{(p)}(0) = E(X^p)$.

3) *Remarque* : On ne peut pas dériver les inégalités !!!

Par des $DL_2(0)$, on a $E(e^{tX}) = 1 + \frac{1}{2} t^2 E(X^2) + o(t^2)$.

Et $\frac{be^{ta} - at^{tb}}{b - a} = 1 + \frac{1}{2} t^2 \frac{ba^2 - ab^2}{b - a} = 1 - \frac{1}{2} t^2 ab + o(t^2)$. Par 1), on a $t^2 E(X^2) \leq -t^2 ab + o(t^2)$ en 0^+ .

En divisant par t^2 (qui est > 0), et en passant à la limite, on obtient $E(X^2) \leq -ab$.

4) On a $\forall x \in [a, b]$, $(x - a)(b - x) \geq 0$, donc $\forall x \in [a, b]$, $x^2 \leq (b - a)x - ab$.