Interrogation n°21 bis. *Barème sur 24 pts*

Problème. Matrice de Dirichlet (*inspiré de Centrale PC 2018*)

Soit $n \geq 2$. On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } |i-j| = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1) [0.5 pt] Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) [3 pts] Dans cette question, on prend $n = 3$. On a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer qu'il existe un réel $\mu > 0$ tel que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \mu, -\mu\}$.

b) Déterminer une matrice orthogonale $U \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $U^{-1}AU = \mathrm{Diag}(0, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3) *On revient dans la suite au cas général où n est arbitraire*

Soit X un vecteur propre de A, et λ la valeur propre associée.

a) [1.5 pt] En considérant p tel que $|x_p| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$, montrer que $|\lambda| \leq 2$.

En déduire qu'il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\boxed{\lambda = 2\cos\theta}$

b) [1 pt] On pose $x_0 = x_{n+1} = 0$. On a ainsi $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $x_{j-1} - \lambda x_j + x_{j+1} = 0$.

Montrer que le sev propre E_λ est de dimension 1.

c) [2 pts] Montrer qu'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda = 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$.

Indication : On rappelle que les racines complexes de $1 - 2(\cos\theta)z + z^2$ sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

d) [2 pts] Montrer que le spectre de A est

$$\mathrm{Sp}(A) = \left\{ 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),\ k \in [\![1, n]\!] \right\}$$

Question supplémentaire hors interrogation : Donner une base de vecteurs propres de A.

4) [1.5 pt] On considère $M = (1 - 2r)I_n + rA$, où $r > 0$.

Donner une CNS sur r pour que la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit bornée pour *toute* valeur de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice A. Développement en série entière de tan (*inspiré de Centrale PC 2019*)

On note $\tan^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de la fonction tan.

1) [3 pts] Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré $\leq n+1$ et à coefficients $\boxed{\text{dans } \mathbb{N}}$ tel que

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ \tan^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$$

2) [1.5 pt] On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = \dfrac{\tan^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{P_n(0)}{n!}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leq \tan(x)$.

Indication : On pourra utiliser (ou non) la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral.

3) [1 pt] En déduire que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ vérifie $R \geq \dfrac{\pi}{2}$.

4) [2 pts] Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

En utilisant $\tan' = 1 + \tan^2$, montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ f'(x) = 1 + f(x)^2$.

5) [1 pt] En utilisant arctan, en déduire que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ f(x) = \tan(x)$ et que $R = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice B. Variables aléatoires bornées

Soit $X : \Omega \to [a, b]$ une variables aléatoire réelle à valeurs dans $[a, b]$, avec $a \leq 0 \leq b$.

On suppose de plus $\boxed{E(X) = 0}$.

1) [1.5 pt] En utilisant un argument de convexité, montrer que pour tout réel t, on a

$$E(e^{tX}) \leq \frac{be^{ta} - at^{tb}}{b-a}$$

2) [1 pt] Montrer que $F : t \longmapsto E(e^{tX})$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et calculer $F^{(p)}(0)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

3) [1 pt] En utilisant 1) et 2), montrer que $E(X^2) \leq -ab$.

4) [0.5 pt] Retrouver 3) en utilisant la fonction $\psi : x \longmapsto (x-a)(b-x)$.