Interrogation n°20. Corrigé

Exercice A. Interpolation et prolongement C^∞

1) - L'application $x \longmapsto g(x,t)$ est de classe C^∞

- Les applications $t \longmapsto \dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)$ sont continues (par morceaux) sur $[0,1]$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\forall x \in [a,b]$, $\left|\dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq \sup_{[a,b]\times[0,1]} \left|\dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}\right| = \varphi(t)$,

et φ est intégrable sur $[0,1]$.

Donc F est de classe C^∞ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(x) = \int_0^1 \dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)\ dt$.

2) a) On a $f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\ dt$.

En intégrant par parties $(n-1)$ fois avec $1 \to (t-x) \to ... \to \dfrac{(t-x)^{(n-1)}}{(n-1)!}$, on obtient :

$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\dfrac{(-1)^{k-1}(t-x)^k}{k!}\ f^{(k)}(t)\right]_a^x + (-1)^{n-1} \int_a^x \dfrac{(t-x)^{(n-1)}}{(n-1)!}\ f^{(n)}(t)\ dt.$

Comme $f'(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$, alors $f(x) = \int_a^x \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\ f^{(n)}(t)\ dt$.

Remarque : On peut aussi raisonner par récurrence, puisque la formule est donnée dans l'énoncé.

b) On effectue le changement de variable affine $t = a + \theta(x-a)$, avec $\theta \in [0,1]$.

On obtient $f(x) = (x-a)^n \int_0^1 \dfrac{(1-\theta)^n}{n!}\ f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))\ d\theta$.

c) Il suffit de prouver que $x \longmapsto \int_0^1 \dfrac{(1-\theta)^n}{n!}\ f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))\ d\theta$ est C^∞. Ce qui résulte de 1).

3) a) On considère $u : \mathbb{R}_{n+m-1}[X] \to\ \ P \longmapsto (P(a), ..., P^{(n-1)}(a), P(b), ..., P^{(m-1)}(b))$.

u est linéaire et injective : si $P \in \operatorname{Ker} u$, $(x-a)^n(X-b)^m$ divise P, donc par degré, $P = 0$.

Comme $\dim \mathbb{R}_{n+m-1}[X] = n+m = \dim \mathbb{R}^{n+m}$, alors u est bijective.

D'où l'existence (et l'unicité) de P, avec $P = u^{-1}((f(a), ..., f^{(n-1)}(a), f(b), ..., f^{(m-1)}(b)))$.

b) L'application $x \longmapsto f(x) - P(x)$ vérifie les hypothèses de 2).

Donc $x \longmapsto \dfrac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}$ se prolonge en une fonction C^∞ au voisinage de a.

Il en est donc de même de $x \longmapsto \dfrac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n(x-b)^m}$.

De même, $x \longmapsto \dfrac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n(x-b)^m}$ se prolonge en une fonction C^∞ au voisinage de b.

De plus, $x \longmapsto \dfrac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n(x-b)^m}$ est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{a,b\}$.

On en déduit que $x \longmapsto \dfrac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n(x-b)^m}$ se prolonge en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice B. Retours dans une chaîne de Markov

1) a) Le produit de matrices à coefficients positifs est à coefficients positifs, car $(BC)_{ij} = \sum_{j=1}^N b_{ij}c_{jk}$.

De plus, $LA^n = L$ par récurrence sur n.

Donc les matrices A^n sont des matrices de transition. En particulier, les coefficients appartiennent à $[0,1]$.

Donc la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

b) Supposons $Y_0 \in \operatorname{Im}(A - I_N)$. Il existe X tel que $Z = AX - X$. On a $Y_n = A^{n+1}X - A^nX$.

On a $Y_0 + Y_1 + ... + Y_n = A^{n+1}X - X$. Donc $\left\|A^{n+1}X - X\right\| \leq \left\|A^{n+1}X\right\| + \|X\|$.

Comme la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il en est de même de $(A^nX)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{Y_0 + Y_1 + ... + Y_n}{n+1} = 0$.

c) On note que si $Y_0 \in \operatorname{Ker}(A - I_N)$, on a $A^nY_0 = Y_0$, donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{Y_0 + Y_1 + ... + Y_n}{n+1} = Y_0$.

Or, par le théorème du rang, on a $\operatorname{rg}(A - I_N) + \dim \operatorname{Ker}(A - I_N) = N$.

Il suffit donc de prouver que $\operatorname{Im}(A - I_N)$ et $\operatorname{Ker}(A - I_N)$ sont en somme directe.

Et pour $Y_0 \in \operatorname{Im}(A - I_N) \cap \operatorname{Ker}(A - I_N)$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{Y_0 + Y_1 + ... + Y_n}{n+1}\right) = 0 = Y_0$.

Donc on a bien $\operatorname{Im}(A - I_N) \oplus \operatorname{Ker}(A - I_N) = \mathbb{R}^N$.

De plus, en décomposant Y_0, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{Y_0 + Y_1 + ... + Y_n}{n+1}\right) = Z$,

où Z est le projeté de Y_0 sur $\operatorname{Ker}(A - I_N)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(A - I_N)$.

Comme la propriété est vraie pour tout Y_0 (et notamment pour les E_j), $\left(\dfrac{I_N + A + ... + A^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2) a) On a $A^TL^T = L^T$, donc 1 est valeur propre de A.

Comme $\chi_A = \chi_{A^T}$, alors 1 est aussi valeur propre de A. D'où l'existence de X.

b) On a $x_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}x_j$, donc $|x_i| \leq \sum_{j=1}^N a_{ij}\,|x_j|$, car $a_{ij} \geq 0$. On a donc bien $AY_0 \geq Y_0$.

c) Si $X \leq Y$, alors $AX \leq AY$ (car $a_{ij} \geq 0$). On a donc par récurrence $Y_n \geq Y_0$.

Donc $Z = \lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n Y_k\right) \geq Y_0$ par passage à la limite des inégalités larges.

A fortiori, Z est non nul et à coefficients positifs.

d) Avec les notations précédentes, on a $Z \in \operatorname{Ker}(I_N - A)$. Quitte à diviser par la somme de ses coefficients, on obtient bien $Z = (\mu_1, ..., \mu_N) \in \operatorname{Ker}(I_N - A)$, avec $\mu_j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^N \mu_j = 1$.

3) On a $a_{ij} = P(X_{n+1} = i \mid X_n = j) \geq 0$.

Et $\forall j$, $\sum_{i=1}^N a_{ij} = \sum_{i=1}^N P(X_{n+1} = i \mid X_n = j) = \sum_{i=1}^N P_{X_n=j}(X_{n+1} = i) = 1$.Donc $LA = A$.

4) On procède par récurrence sur n. On a $P(X_0 = i \mid X_0 = j) = \delta_{ij}$ et on a bien $A^0 = I_N$.

Par le lemme admis, $P(X_{n+1} = i \mid X_0 = j) = \sum_{k=1}^N P(X_{n+1} = i \mid X_n = k, X_0 = j)P(X_n = k \mid X_0 = j)$.

Or, par (ii), on a (cf annexe) $P(X_{n+1} = i \mid X_n = k, X_0 = j) = P(X_{n+1} = i \mid X_n = k) = a_{ik}$.

Et on a $P(X_n = k, X_0 = j) = a_{kj}^{(n)}$ par hypothèse de récurrence.

Donc $P(X_{n+1} = i \mid X_0 = j) = \sum_{k=1}^N a_{ik}a_{kj}^{(n)} = a_{ij}^{(n+1)}$.

5) Par la formule des probas totales, $P(X_k = X_0) = \sum_{j=1}^N P(X_k = j \mid X_0 = j)P(X_0 = j)$.

On a $P(X_k = X_0) = \sum_{j=1}^N a_{jj}^{(k)} P(X_0 = j)$.

Or, $a_n = \sum_{k=0}^n 1_{X_k=X_0}$, donc $\dfrac{E(a_n)}{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^N a_{jj}^{(k)} P(X_0 = j) = \sum_{j=1}^N \left(\dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_{jj}^{(k)}\right) P(X_0 = j)$.

Or, par 1), $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_{jj}^{(k)} = b_{jj}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{E(a_n)}{n+1} = \sum_{j=1}^N b_{jj}\ P(X_0 = j)$.

6) On sait que B est la matrice de projection sur $\mathbb{R}\ Z$. Donc ses colonnes B_j appartiennent à $\mathbb{R}\ Z$.

Par ailleurs, B est une matrice de transition (car les A^n sont des matrices de transition et que l'ensemble des matrices de transitions est une partie convexe fermée).

Donc toutes les colonnes B_j sont égales à Z (car colinéaires à Z et la somme des coefficients vaut 1).

On a donc $b_{ij} = \mu_i$, et en particulier, $b_{jj} = \mu_j$.

Annexe : $(X_n = k, X_0 = j) = \bigcup_{(j_1,\ldots,j_{n-1})\in\Delta^{n-1}}(X_0, \ldots, X_n) = (j, j_1, \ldots, j_{n-1}, k)$.

Or, $P(X_{n+1} = i, X_n = k, X_0 = j) = \sum_{(j_1,\ldots,j_{n-1})\in\Delta^{n-1}} P((X_0, \ldots, X_n) = (j, j_1, \ldots, j_{n-1}, k))$

Donc par (ii), $= \sum_{(j_1,\ldots,j_{n-1})\in\Delta^{n-1}} P(X_{n+1} = i \mid X_n = k)P((X_0, X_1, \ldots, X_n) = (j, j_1, \ldots, j_{n-1}; k))$

D'où $P(X_{n+1} = i, X_n = k, X_0 = j) = P(X_{n+1} = i \mid X_n = k)P(X_n = k, X_0 = j)$.