TD Oraux : Algèbre linéaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $v : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad M \longmapsto AM$ et $w : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad M \longmapsto MA$.

On pose $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad M \longmapsto AM + MA$, c'est-à-dire $u = v + w$.

Les questions suivantes correspondent à des sujets d'oraux *différents*, et peuvent (doivent) être donc traitées indépendamment (même si certaines propriétés impliquent d'autres).

1) a) En utilisant les polynômes annulateurs, montrer que v et w sont diagonalisables ssi A est diagonalisable.

b) En déduire (en admettant une propriété vue en cours) que si A est diagonalisable, alors u est diagonalisable.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $\chi_A(x) = \prod_{j=1}^{r}(x - \lambda_j)^{m_j}$, où les λ_j sont distincts.

On suppose A diagonalisable. Montrer que $\operatorname{rg} u = n^2 - \sum_{j=1}^{r}(m_j)^2$.

3) On suppose A nilpotente. Montrer que u est nilpotente.

4) a) On suppose $A = \operatorname{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Montrer que u est diagonalisable et expliciter une base de vecteurs propres.

b) On suppose A diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Déduire de a) que u est diagonalisable et expliciter une base $(M_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ de vecteurs propres.

Remarque : On pourra noter a, m et m_{ij} les endomorphismes canoniquement associés à A, M et M_{ij}.

5) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i)$.

a) En considérant la matrice de v dans la base (E_{ij}) bien ordonnée, montrer que $\chi_v(x) = \chi_A(x)^n$.

Montrer de même que $\chi_w(x) = \chi_A(x)^n$.

b) On suppose pour simplifier au cas où A est triangulaire supérieure : on a ainsi $\lambda_i = a_{ii}$.

On pose $\mu_{ij} = \lambda_i + \lambda_j$. En s'inspirant de a) montrer que $\chi_u(x) = \prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}(x - \mu_{ij})$

c) En déduire que u est inversible ssi $\operatorname{Sp}(A) \cap \operatorname{Sp}(-A) = \emptyset$.

Corrigé

1) a) On a $v^k(M) = A^k M$, donc pour tout polynôme $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $P(v)(M) = P(A)M$.

Or, $BM = O_n$ pour toute matrice M ssi $B = O_n$ (on prend $M = I_n$ pour le sens direct).

Donc $P(v) = 0$ ssi $P(A) = O_n$. Or, un endomorphisme est diagonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. D'où v diagonalisable ssi A diagonalisable.

De même pour w, car $P(w)(M) = MP(A)$.

b) v et w commutent, donc s'ils sont diagonalisables, ils sont codiagonalisables (propriété admise ici)

Donc u est aussi diagonalisable (dans la même base).

2) Par le théorème du rang, on a $\operatorname{rg} u = n^2 - \dim \operatorname{Ker} u$.

Or, $\operatorname{Ker} u$ est le commutant de $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(K) \mid AM = MA\}$.

Or, A est diagonalisable, donc si M commute avec A, alors les sev propres de A sont stables par M.

Quitte à choisir une base de diagonalisation P de l'endomorphisme a associé à A, on a donc

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I & & & \\ & \lambda_2 I & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r I \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}MP = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_r \end{pmatrix}, \text{ avec } M_i \in \mathcal{M}_{m_i}(K)$$

La réciproque étant vraie, c'est-à-dire quelles que soient $M_1, ..., M_r$, les matrices commutent.

Donc $\dim C(A)$ est la dimension de l'ev des matrices de cette forme, c'est-à-dire $\dim C(A) = \sum_{i=1}^{r} (m_i)^2$.

3) On a $A^n = O_n$. Donc $v^n = w^n = 0$ (cf début du corrigé de la question 1) a)).

Comme v et w commutent et que $u = v - w$, on a par le binôme $u^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} v^j w^{k-1}$.

En prenant $k = 2n + 1$, on a $j \geq n$ ou $w - j \geq n$ pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, donc $u^k = \sum_{j=0}^{k} 0 = 0$.

4) a) On a $v(E_{ij}) = AE_{ij} = \lambda_i E_{ij}$ et $w(E_{ij}) = E_{ij}A = \lambda_j E_{ij}$, donc $u(E_{ij}) = (\lambda_i + \lambda_j)E_{ij}$.

On en déduit que la base canonique est une base de vecteurs propres de u.

Donc u est diagonalisable et $\operatorname{Sp}(u) = \{\lambda_i + \lambda_j,\ (i, j) \in [\![1, n]\!]^2\}$.

b) Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} a = \operatorname{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ est diagonale.

On cherche les endomorphismes $m \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ qui sont vecteurs propres de $u : m \longmapsto a \circ m + m \circ a$.

En se plaçant dans la base $\mathcal{B}$, on se ramène au cas où A est diagonale.

Il résulte donc de a) que $u(m_{ij}) = (\lambda_i + \lambda_j)m_{ij}$, où m_{ij} est telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} m_{ij} = E_{ij}$.

Autrement dit, on choisit M_{ij} telle que $P^{-1}MP = E_{ij}$, où $P \in GL_n(\mathbb{C})$ vérifie $P^{-1}AP = D$.

5) a) On a $AE_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}E_{ki}E_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}E_{kj}$.

On considère alors la matrice de v dans la base $\mathcal{B} = (E_{11}, ..., E_{n1}, E_{12}, ..., E_{n2}, ..., E_{1n}, ..., E_{nn})$.

Alors $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} v = \begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix}$, d'où a fortiori $\chi_v(x) = \chi_A(x)^n$.

On a de même $\chi_w(x) = \chi_A(x)^n$ en prenant $\mathcal{B} = (E_{11}, ..., E_{1n}, E_{21}, ..., E_{2n}, ..., E_{n1}, ..., E_{nn})$.

En effet, $E_{ij}A = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}E_{ij}E_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}E_{ik}$.

b) On a $u(E_{ij}) = AE_{ij} + E_{ij}A = \sum_{k=1}^{i} a_{ki}E_{kj} + \sum_{k=j}^{n} a_{jk}E_{ik}$.

Dans la base $\mathcal{B} = (E_{1n}, ..., E_{11}, E_{2n}, ..., E_{21}, ..., E_{nn}, ..., E_{n1})$, la matrice de u est triangulaire.

De plus, $u(E_{ij}) = (a_{ii} + a_{jj})E_{ij} + ...$, donc $\chi_u(x) = \prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}(x - \mu_{ij})$, où $\mu_{ij} = a_{ii} + a_{jj} = \lambda_i + \lambda_j$.

c) Ainsi, u est inversible ssi $\forall (i,j)$, $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$, donc ssi $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(-A) = \emptyset$.

6) Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère les propriétés suivantes :

(i) Il existe une matrice non nulle $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AM = MB$

(ii) $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \emptyset$

(iii) $\chi_A(B)$ n'est pas inversible.

a) Montrer que (ii) et (iii) sont équivalentes.

b) Montrer que (i) implique (iii).

c) On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B)$.

En considérant $M = XY^T$, où X et Y vecteurs propres bien choisis, montrer (i).

d) En déduire que u est inversible ssi $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(-A) = \emptyset$.

6) a) $\chi_A(B) = \prod_{i=1}^n (B - \lambda_i I_n)$, donc $\det \chi_A(B) = \prod_{i=1}^n \det(B - \lambda_i I_n)$

Ainsi, $\chi_A(B)$ est inversible ssi les λ_i ne sont pas valeurs propres de B, donc ssi $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

b) Supposons qu'il existe une matrice non nulle $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AM = MB$.

On a donc $A^k M = MB^k$, donc $P(A)M = MP(B)$ pour tout polynôme P.

Avec $P = \chi_A$, on a $\chi_A(A) = O_n$ par Cayley-Hamilton, donc $M\chi_A(B) = O_n$.

Donc $\chi_A(B)$ n'est pas inversible (sinon, M serait nulle), donc (iii).

c) Considérons $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B)$. Comme B et B^T ont mêmes polynômes caratéristique, il existe

X et Y non nuls tels que $AX = \lambda X$ et $B^T Y = \lambda Y$. Donc $AXY^T = \lambda XY^T = XY^T B$.

D'où le résultat car $XY^T = (y_1 X, ..., y_n X)$ n'est pas nulle puisque X et Y sont des vecteurs non nuls.

d) u est inversible ssi $\mathrm{Ker}\, u = \{O_n\}$ donc ssi l'équation $M = M(-A)$ n'a pas de solution M non nulle.