$\boxed{\textbf{Polynômes de Lagrange}}$

1) Isomorphisme fondamental

a) *Prop* : Soit $(a_1, a_2, ..., a_n \in K$ deux à deux distincts.

Alors $\boxed{\text{l'application linéaire } u : K_{n-1}[X] \to K^n \quad P \longmapsto (P(a_1), ..., P(a_n)) \text{ est bijective}}$ (isomorphisme linéaire).

Autrement dit, $\boxed{\text{un polynôme de degré} \leq n-1 \text{ est entièrement défini par } (P(a_1), ..., P(a_n)) \in K^n}$.

dem : u est injective : Si $P \in \operatorname{Ker} u$, alors les a_i sont racines de P, et comme $\deg P \leq n-1$, alors $P = 0$.

Comme $\dim K_{n-1}[X] = \dim K^n$, alors u est bijective.

Remarque : Si on prend $u : K[X] \to K^n \quad P \longmapsto (P(a_1), ..., P(a_n))$, le noyau $\operatorname{Ker} u$ est le sev des multiples de $B = (X - a_1)(X - a_2)...(X - a_n)$, c'est-à-dire $\operatorname{Ker} u = B.K[X] = \{BQ,\ Q \in K[X])$.

b) *Lien avec la matrice de Van der Monde*

Considérons $\mathcal{B} = (1, X, X^2, ..., X^{n-1})$ la base canonique de $K_{n-1}[X]$ et $\mathcal{C}$ la base canonique de K^n.

$$\text{Alors } \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} u = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & (a_1)^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & (a_2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & (a_n)^{n-1} \end{pmatrix} = V(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathcal{M}_n(K).$$

Lorsque deux a_j sont égaux, alors $V(a_1, a_2, ..., a_n)$ contient deux lignes égales donc n'est pas inversible.

On en déduit que $V(a_1, a_2, ..., a_n)$ est inversible ssi les a_j sont deux à deux distincts.

Remarque : La matrice de Van der Monde est donc la matrice du système linéaire dont les inconnues sont les coefficients α_j de $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + ... + \alpha_n X^{n-1}$, et dont les équations sont les $P(a_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Remarque : On peut démontrer par ailleurs que $\det V(a_1, a_2, ..., a_n) = \prod_{i<j}(a_j - a_i)$.

On retrouve ainsi que la matrice $V(a_1, a_2, ..., a_n)$ est inversible ssi les a_j sont deux à deux distincts.

c) *Polynômes de Lagrange*

On considère les polynômes de Lagrange $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\boxed{L_i(X) = \prod_{j \neq i} \left(\dfrac{X - a_j}{a_i - a_j} \right)} \in K_{n-1}[X]$.

On a $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $L_i(a_j) = \delta_{ij}$ (c'est-à-dire 1 si $i = j$ et 0 sinon).

Ainsi, $u(L_i) = E_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0., ..., 0)$ le i-ième vecteur de la base canonique de K^n.

Remarque : Donc $(L_1, L_2, ..., L_n)$ est une base de $K_{n-1}[X]$, image de la base canonique par l'isomorphisme u^{-1}.

d) *Isomorphisme réciproque*

Soit $Y = (y_1, ..., y_n) \in K^n$.

On cherche à expliciter l'unique polynôme $P \in K_{n-1}[X]$ tel que $u(P) = Y$, c'est-à-dire $\forall j,\ P(a_i) = y_i$.

Avec $Y = \sum_{i=1}^n y_i E_i$ (base canonique de K^n), on a $P = u^{-1}(Y) == \sum_{i=1}^n y_i u^{-1}(E_i)$.

(*remarque* : Il s'agit du principe du superposition dans les équations linéaires).

Or, on a par c), on a $u(L_i) = E_i$.

$\boxed{\text{Donc l'unique polynôme } P \in K_{n-1}[X] \text{ vérifiant } u(P) = Y \text{ est } P = \sum_{i=1}^n y_i L_i}$.

Exemple : Si a, b, c sont distincts, et si $(\alpha, \beta, \gamma) \in K^3$, l'unique polynôme de degré ≤ 2 vérifiant

$$P(a) = \alpha,\ P(b) = \beta \text{ et } P(c) = \gamma$$

est

$$P = \alpha\ \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + \beta\ \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} + \gamma\ \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Remarque : On peut en déduire la matrice $W = V(a_1, a_2, ..., a_n)^{-1}$ inverse de la matrice de Van der Monde.

En effet, on a $W = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\, u^{-1}$, et la j-ième colonne de W contient donc les coordonnées de $u^{-1}(E_j)$ dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire les coefficients du polynôme L_j. Par exemple, les coefficients situés sur la dernière ligne sont les coefficients dominants des L_j, c'est-à-dire les $\prod_{1 \leq i \leq n \text{ et } i \neq j} \left(\frac{1}{a_j - a_i}\right)$.

2) Base de Lagrange

a) **Important**

Prop : Tout polynôme $P \in K_{n-1}[X]$ est l'unique polynôme valant $P(a_i)$ en a_i, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

On a donc $\boxed{\forall P \in K_{n-1}[X],\ P(X) = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i(X)}$.

Les coordonnées de P dans la base de Lagrange $(L_1, ..., L_n)$ sont les $P(a_i)$.

Remarque : Une preuve directe consiste à noter que $P(X) - \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i(X)$ s'annule en n points et est de degré $< n$, donc est nul.

Exemple : Pour $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^n L_i(X) = 1$.

b) **Exemple d'utilisation**

Prop : Soient $0 \leq a_1 < .... < a_n \leq 1$.

Il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ tels que $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\int_0^1 P(t)\ dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(a_i)$.

(*existence*) On a $P(X) = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i(X)$, donc $\lambda_i = \int_0^1 L_i(t)\ dt$ convient.

(*unicité*) Avec $P = L_i$, on a nécessairement $\int_0^1 L_i(t)\ dt = \lambda_i$.

$\boxed{\textbf{Interpolations de Lagrange, de Taylor, de Hermite}}$ (*complément*)

1) Interpolation de Lagrange

a) *Propriété fondamentale*

Prop : Soient $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ deux à deux distincts.

Pour tout $(y_1, ..., y_n) \in K^n$, il existe un unique $P \in K_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(a_i) = y_i$.

P est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange en les points (a_i, y_i), avec $1 \leq i \leq n$.

b) *Interpolation d'un polynôme et lien avec la division euclidienne.*

Prop : Soit $M \in K[X]$ et $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ distincts. $\boxed{\text{Posons } B = (X - a_1)(X - a_2)...(X - a_n)}$.

$\boxed{\text{Alors le reste } R \text{ de la division euclidienne de } M \text{ par } B \text{ est le polynôme d'interpolation de } M \text{ en les } a_i}$.

Preuve : On a $M = BQ + R$, avec $\deg R \leq n - 1$ et $R(a_i) = M(a_i)$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Remarque : Un polynôme de degré $\leq n - 1$ est son propre polynôme d'interpolation.

Exemple : Le polynôme d'interpolation de X^n en les a_i est $R = X^n - (X - a_1)(X - a_2)...(X - a_n)$.

En effet, on cherche parmi les polynômes de la forme $X^n + (X - a_1)(X - a_2)...(X - a_n)Q(X)$ celui qui est degré $< n$, ce qui revient à déterminer le reste de X^n par $(X - a_1)(X - a_2)...(X - a_n)$.

c) *Complément : explicitation de P à l'aide de la base de Newton*

Exemple (*à connaître*) : La droite d'interpolation de f en a et b est :

$$\boxed{L(x) = \alpha + \beta(x - a), \text{ avec } \alpha = f(a) \text{ et } \beta = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Généralisation : Pour déterminer le polynôme P de degré ≤ 2 vérifiant $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$ et $P(c) = f(c)$, il est judicieux de le chercher sous la forme $P = \alpha + \beta(x - a) + \gamma(x - a)(x - b)$.

On obtient ainsi un système triangulaire inversible (on détermine α, puis β, puis γ).

De façon générale, la base de Newton est $(1, (X - a_1), (X - a_1)(X - a_2), ..., (X - a_1)(X - a_2)...(X - a_{n-1}))$.

2) Interpolation de Taylor

a) *Propriété fondamentale*

Prop : Soient $a \in K$ et $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $(y_0, y_1, ..., y_{n-1}) \in K^n$, il existe un unique $P \in K_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![0, n - 1]\!]$, $P^{(k)}(a) = y_k$.

Preuve : On montre que $\boxed{u : K_{n-1}[X] \to K^n \quad P \longmapsto (P(a), P'(a), ..., P^{(n-1)}(a))}$ est linéaire bijective.

En effet, $u(P) = 0$ ssi $(X - a)^n$ divise P, donc ssi $P = 0$ par degré.

b) *Explicitation de P en la base de Taylor (par le principe de superposition)*

Le polynôme $R_k(X) = \dfrac{(X - a)^k}{k!}$ vérifie $R_k^{(j)}(a) = \delta_{jk}$.

On en déduit que l'unique $P \in K_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![0, n - 1]\!]$, $P^{(k)}(a) = y_k$ est $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k R_k(X)$.

c) *Interpolation de Taylor d'une fonction en un point a à l'ordre n*

Soit $f : K \to \mathbb{R}$.

Le polynôme de Taylor de f en a à l'ordre n est l'unique $P \in K_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$.

On a alors $\boxed{P(X) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\dfrac{(X-a)^k}{k!}}$.

3) Interpolation de Hermite

a) *Prop* : Soient $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ distincts.

Pour tout $(y_1, ..., y_n, z_1, z_2, ..., z_n) \in K^{2n}$, il existe un unique $P \in K_{2n-1}[X]$ tel que $\begin{cases} \forall i \in [\![1, n]\!],\ P(a_i) = y_i \\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ P'(a_i) = z_i \end{cases}$

Preuve : On considère l'application linéaire $\boxed{u : K_{2n-1}[X] \to K^{2n} \quad P \longmapsto (P(a_1), ..., P(a_n), P'(a_1), ..., P'(a_n))}$.

L'application u est injective : Si $u(P) = 0$, alors les a_j sont des racines au moins doubles de P.

Donc P admet au moins $2n$ racines comptées avec multiplicité, donc par degré, $P = 0$.

Comme $\dim K_{2n-1}[X] = 2n = \dim K^{2n}$, alors u est bijective (car injective).

b) Il est difficile d'expliciter P dans le cas général.

Prenons le cas $n = 2$, avec $P \in K_3[X]$ défini par $(P(a), P(b), P'(a), P'(b)) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

Par le principe de superposition, on se ramène à traiter les cas où (y_1, y_2, y_3, y_4) est l'un des quatre vecteurs de la base canonique. Par exemple, en prenant $P = \lambda(X-a)(X-b)^2$, on a $P(a) = P(b) = P'(b) = 0$. On explicite λ de sorte que $P'(a) = 0$, d'où $\lambda = \frac{1}{(a-b)^2}$.

4) Lien entre interpolation d'un polynôme et division euclidienne

Rappel : Le polynôme d'interpolation $R(X)$ de $P(X)$ en les points $a_1, ..., a_n$ est le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par le polynôme scindé à racines simples $B(X) = (X-a_1)(X-a_2)...(X-a_n)$.

Exemple : Considérons la division euclidienne de $P \in K[X]$ par $B = (X-a)(X-b)$.

On a donc $P = BQ + R$, avec $\deg R \leq 1$, c'est-à-dire R de la forme $R(X) = \alpha X + \beta$.

Si $a \neq b$, R est le polynôme d'interpolation de P en a et b. On obtient α et β en considérant $\begin{cases} R(a) = P(a) \\ R(b) = P(b) \end{cases}$

Si $a = b$, R est le polynôme de Taylor de P en a à l'ordre 1. On obtient α et β en considérant $\begin{cases} R(a) = P(a) \\ R'(a) = P'(a) \end{cases}$

Ainsi, prenons $P_n = X^n$. On a $R_n = \alpha_n X + \beta_n$.

Si $a \neq b$, on obtient $\begin{cases} R_n(a) = a^n \\ R_n(b) = b^n \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} \alpha_n a + \beta_n = a^n \\ \alpha_n b + \beta_n = b^n \end{cases}$, donc $\alpha_n = \dfrac{b^n - a^n}{b-a}$ et $\beta_n = \dfrac{ba^n - ab^n}{b-a}$.

Remarque : En fait, on peut aussi déterminer R_n directement par $R_n = P_n(a) + \dfrac{P_n(b) - P_n(a)}{b-a}(X-a)$.

Si $a = b$, $R_n = P_n(a) + P_n'(a)(X-a)$, donc $\alpha_n = na^{n-1}$ et $\beta_n = -(n-1)a^n$.

Les valeurs obtenues pour $a = b$ sont d'ailleurs les limites de $\dfrac{b^n - a^n}{b-a}$ et $\dfrac{ba^n - ab^n}{b-a}$ lorsque b tend vers a.