Endomorphisme associé à une matrice, matrices d'un endomorphisme

1) Matrice d'un vecteur dans une base

a) Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E.

Tout vecteur $x \in E$ est entièrement déterminé par le n-uplet X de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Plus précisement, l'application $\varphi : E \to K^n \quad x \longmapsto X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, x$ est un isomorphisme linéaire.

Remarque : $\varphi^{-1} : K^n \to E \quad (\lambda_1, ..., \lambda_n) \longmapsto \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$.

Remarque : Ainsi, $\boxed{\text{le choix d'une base } \mathcal{B} \text{ définit un isomorphisme de } E \text{ sur } K^n}$.

b) Si $x_1, ..., x_p$ sont des vecteurs de E et si $A = (X_1, ..., X_p) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_p)$, on a $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(x_i, ..., x_p)$.

Ainsi, $(x_1, ..., x_n)$ est une base de E ssi $(X_1, ..., X_n)$ est une base de K^n, c'est-à-dire ssi A est inversible.

Exemple : (♣♣♣) On considère une famille de polynômes $(P_0, ..., P_n) \in K_n[X]$ telles que $\deg P_j = j$ pour tout k.
Alors la matrice A de la famille $(P_0, ..., P_n)$ dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, ..., X^n)$ est triangulaire supérieure inversible (ses coefficients diagonaux sont les coefficients dominants des P_j). Donc $(P_0, ..., P_n)$ est une base de $K_n[X]$.

2) Endomorphisme de K^n canoniquement associé à une matrice

a) *Exemple : Les endomorphismes de K^2*

Soit $u : K^2 \to K^2$ un endomorphisme de K^2.

On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et on considère $u(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $u(e_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

u est entièrement déterminé par $u(e_1)$ et $u(e_2)$:

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2$, alors $u(X) = xu(e_1) + yu(e_2) = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$.

On en déduit que LES endomorphismes de K^2 sont les $u : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\boxed{\text{LES endomorphismes de } K^2 \text{ sont les } u : X \longmapsto AX, \text{ où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)}$.

En pratique, $\boxed{\text{on identifie la matrice } A \text{ et l'endomorphisme } u : X \longmapsto AX \text{ qui lui est associé}}$.

La j-ième colonne A_j de A est $\boxed{A_j = AE_j = u(E_j)}$, où E_j est le j-ième vecteur de la base canonique de K^n.

Le produit de deux matrices carrés est défini de sorte qu'il corresponde à la composée des endomorphismes : si u et v sont les endomorphismes de K^2 associés aux matrices A et B, alors $u \circ v$ est l'endomorphisme canoniquement associé au produit AB.

b) *Noyau et image*

Soit $u : K^n \to K^n \; X \longmapsto AX$ l'endomorphisme canoniquement associée à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

$\boxed{\text{Pour déterminer le noyau de } u, \text{ on résout } AX = 0}$.

$\boxed{\text{L'image de } u \text{ est l'espace engendré par les } u(e_j), \text{ c'est-à-dire par les vecteurs colonnes de } A}$.

Ainsi, les assertions suivantes sont équivalentes :

i) u est bijectif , A inversible, $(A_1, ..., A_n)$ est une base de K^n.

ii) u injectif , $(\forall X,\ AX = 0 \text{ ssi } X = 0)$

iii) u surjectif , $\mathrm{rg}\, A = n$.

3) Matrices d'un endomorphisme

a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.

Alors u est entièrement déterminée par les $u(e_j)$, et chaque $u(e_j)$ est déterminé par ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.

Donc u est entièrement déterminée par la matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} = (A_1, ..., A_n) \in \mathcal{M}_n(K)$, où la j-ième colonne A_j de A est le vecteur des coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}$. On pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$.

Ainsi, $\boxed{\text{le coefficient } a_{ij} \text{ est la } i\text{-ième coordonnée de } x \text{ de } u(e_j) \text{ dans la base } \mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)}$.

$\boxed{\text{La relation } y = u(x) \text{ s'écrit matriciellement } Y = AX, \text{ où } Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u(x),\ A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u \text{ et } X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, x}$.

b) *Cas particulier important* : Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et si u est l'endomorphisme associé à A, c'est-à-dire $u : K^n \to K^n$ $X \longmapsto AX$, alors A est la matrice de u ans la base canonique $\mathcal{C} = (E_1, ..., E_n)$ de K^n.

Terminologie : Dans la base canonique $\mathcal{C}$ de K^n, les coordonnées de tout vecteur$X = (x_1, ..., x_n) \in K^n$ sont ses coefficients, c'est-à-dire $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\, X$. C'est pourquoi cette base particulière de K^n est appelée base canonique (et il en est de même dans $\mathcal{M}_n(K) \sim K^{(n^2)}$ et aussi dans $K_n[X] \sim K^{n+1}$).

c) *Exemple* : (♣♣♣) *Endomorphismes diagonalisables.*

Un vecteur propre de u est un vecteur non nul tel qu'il existe λ vérifiant $u(x) = \lambda x$.

Prop : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une base où la matrice de u est diagonale.

ii) Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Preuve : Avec $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ ssi $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$, $u(e_j) = \lambda_j e_j$.

4) Changements de bases

a) Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, on définit la matice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ par $\boxed{P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, \mathcal{B}' \in GL_n(K)}$.

Autrement dit, les colonnes de $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ sont les coordonnées des vecteurs de la "nouvelle" base $\mathcal{B}'$ en fonction des vecteurs de l'ancienne base $\mathcal{B}$. Ainsi, $\boxed{e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i}$.

$\boxed{\text{Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur : } X = PX'}$.

Remarque : On en déduit au passage que $(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$.

$\boxed{\text{Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme : } A' = P^{-1}AP}$.

En effet, on a $Y' = A'X'$, $Y = AX$, $X = PX'$ et $Y = PY'$, donc $A'X' = Y' = P^{-1}Y = P^{-1}AX = P^{-1}APX'$.
Comme X' est arbitraire, on obtient bien $A' = P^{-1}AP$.

b) *Exemple* : (♣♣♣) *Matrices de projection.*

Rappel : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une projection ssi $u \circ u = u$.

Prop : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A vérifie $A^2 = A$

ii) Il existe une matrice inversible $P\in GL_n(K)$ et $r \in \{0, 1, ..., n\}$ telle que $P^{-1}AP = J_r$, où $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$.

Preuve : Supposons i). Posons $E = K^n$. Considérons $u : X \longmapsto AX$ l'endomorphisme de E associé à A.
Ainsi, A est la matrice de u dans la base canonique $\mathcal{C}$ de K^n.

On a $A^2 = A$, c'est-à-dire $u \circ u = u$. Donc u est une projection.
En posant $F = \mathrm{Im}\, u$ et $G = \mathrm{Ker}\, u$, on a $F \oplus G = E$, et u est la projection sur F parallèlement à G.
On considère une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ adaptée à $F \oplus G = E$, c'est-à-dire $\mathcal{B}_1$ base de F et $\mathcal{B}_2$ base de G.
Pour tout $x \in F$, on a $u(x) = x$ et pour tout $x \in G$, on a $u(x) = 0$.
On en déduit que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$, où $r = \dim F$.

Donc $P^{-1}AP = J_r$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. On obtient ainsi ii).

Supposons ii). On vérifie directement que $(J_r)^2 = J_r$.
Or, on a $A = PJ_rP^{-1}$, donc $A^2 = (PJ_rP^{-1})(PJ_rP^{-1}) = P(J_r)^2P^{-1} = A$, car $(J_r)^2 = J_r$. On obtient ainsi i).