# Fonctions continues par morceaux

## 1) Définitions

*Def* : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que $\sigma = (x_0, x_1, ...x_n)$ est une subdivision de $[a, b]$ ssi $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Le pas de $\sigma$ est défini par $\Delta(\sigma) = \max_{1 \leq k \leq n}(x_k - x_{k-1})$.

*Def* : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est *continue* (*resp.* $C^1$) *par morceaux* ssi il existe une subdivision $(x_0, x_1, ...x_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, la restriction de $f$ à l'intervalle ouvert $]x_{k-1}, x_k[$ se prolonge en une fonction *continue* (*resp.* $C^1$) sur le segment $[x_{k-1}, x_k]$. On dit alors que la subdivision $\sigma$ est adaptée à $f$ (il en est de même de toute subdivision plus fine).

*Important* : Pour des subdivisions $\sigma$ et $\sigma'$ adaptées à $f$ et $g$, la subdivision $\sigma \cup \sigma'$ est adaptée à la fois à $f$ et à $g$. On en déduit que si $f$ et $g$ sont continues par morceaux sur $[a, b]$, $f + g$ et $fg$ le sont aussi.

## 2) Fonctions continues par morceaux sur un segment

*Def équivalente* : $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux ssi il existe une subdivision $(x_0, x_1, ...x_n)$ de $[a, b]$ telle que $f$ est continue sur les intervalles $]x_{k-1}, x_k[$ et admet aux points $x_k$ **une limite à gauche et une limite à droite** (excepté en $a$ et en $b$ où il existe une seule de ces deux limites).

*Def équivalente* : Une fonction $f$ définie sur un segment est continue par morceaux ssi elle peut s'écrire comme **la somme d'une fonction en escaliers et d'une fonction continue**.

On peut donc définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux. La valeur de l'intégrale ne dépend pas des valeurs en les points de discontinuité (qui sont des points des subdivisions adaptées).

*Positivité* : Si $f$ est continue par morceaux et positive sur le segment $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)\, dt \geq 0$, avec égalité ssi $f$ est nulle en tout point de continuité, donc est nulle excepté en un nombre fini de points.

## 3) Cas des fonctions définies sur un intervalle quelconque

*Def* : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux ssi ses restrictions à tout segment (inclus dans $I$) sont continues par morceaux.

*Exemples* : Les fonctions signe et frac : $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.

## 4) Quelques propriétés des fonctions continues par morceaux

a) Toute fonction $f$ continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ est bornée.

*Approximation uniforme par des fonctions en escaliers* :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escaliers $\varphi$ telle que $\sup_{[a,b]} |f - \varphi| \leq \varepsilon$.

*Sommes de Riemann* : Pour $\sigma = (x_0, ..., x_n)$ subdivision de $[a, b]$, on pose $S(\sigma) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(x_k)$.

Le pas de la subdivision est $\Delta(\sigma) = \max_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1})$. Alors $\lim_{\Delta(\sigma)\to 0} S(\sigma) = \int_a^b f(t)\ dt$.

b) Considérons $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\ dt$, où $f$ est continue par morceaux.

Lorsque $f$ est en escaliers, $F$ est une fonction continue et affine par morceaux.

Dans le cas général, $F$ est continue et $C^1$ par morceaux.

*Remarque* : Sur tout segment $[a,b]$, $f$ est bornée par un réel $k$, donc $F$ est $k$-lispchitzienne sur $[a,b]$.

En effet, $|F(y) - F(x)| \leq \int_{[x,y]} |f(t)|\ dt = k\ |y - x|$.

c) Réciproquement, toute fonction $F$ continue et de classe $C^1$ par morceaux s'écrit sous la forme $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$,

où $f$ est continue par morceaux.

d) *Intégration par parties* : Si $f$ et $g$ sont continues par morceaux, $\int_a^b fG = [FG]_a^b - \int_a^b Fg$.

*Preuve* : On applique l'IPP sur chaque segment d'une subdivision adaptée à $f$ et à $g$, puis on somme.