X PC 2022. Commentaires

I.2) Il faut exploiter l'existence de $k < 1$ tel que $\forall x, |\varphi'(x)| \leq k$ (ne pas confondre avec $|\varphi'| < 1$).

Par IAF, $|f(x)| \leq |f(0)| + k|x|$, d'où on déduit $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = -\infty$.

I.4) *Remarque* : La propriété : "cv normale implique cv d'une série dans un evn de dim finie" est HP.

I.5) a) Ne pas oublier de justifier que la limite appartient à F.

I.5) d) - Si x point fixe de θ, alors x est nécessairement point fixe de ϕ, d'où l'unicité.

- Il reste à prouver que x^* est point fixe de θ : on utilise $\theta \circ \phi = \theta^{m+1} = \phi \circ \theta$.

On a $\theta(x^*) = \theta(\phi(x^*)) = \phi(\theta(x^*))$, donc $\theta(x^*)$ point fixe de ϕ : par unicité du point fixe, $\theta(x^*) = x^*$.

I.6) Il est raisonnable de poser $x = \sup E$, et de prouver que x est point fixe de g.

En exploitant la définition de sup et la monotonie de g, on prouve par passage à la limite $g(x) \leq x$ et $g(x) \geq x$.

II.1) Le plus simple est de calculer les 2-3 premières valeurs puis de conclure par récurrence :

en fait, seul le coefficient c_n d'indice $(1, 2)$ n'est pas évident.

Autre solution : on distingue $\lambda = \mu$ et $\lambda \neq \mu$, et si $\lambda \neq \mu$, on a par réduction c_n de la forme $\alpha\lambda^n + \beta\mu^n$.

II.2) a) Il convient d'utiliser $A = P^{-1}TP$ pour se ramener au cas du 1).

II.4) a) Si $x = \sum_{j=1}^{l} x_j P_j$, avec $(P_1, ..., P_l)$ base de vecteurs propres, on prend $\|x\|_B = \sqrt{\sum_{j=1}^{l} |x_j|^2}$.

On a bien $\|Bx\|_B = \sqrt{\sum_{j=1}^{l} |\lambda_j x_j|^2} \leq \rho(B)\|x\|_B$. *Remarque* : On a ici $\|Bx\|_B = \left\|P^{-1}x\right\|$.

II.4) b) Le plus simple est de prendre $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, car on a $\rho(C) = 0$ et on a: $\exists\, y,\, Cy \neq 0$.

II.5) On a $\|\phi(x) - \phi(x^*)\| \leq k\|x - x^*\|(1 + C\|x - x^*\|)$, avec $k = \rho(A) + \eta < 1$ et $C = \dfrac{M}{K}$.

En prenant $\varepsilon > 0$ tel que $K = k(1 + C\varepsilon) < 1$, on a $\|x_0 - x^*\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|\phi(x) - x^*\| \leq K\|x - x^*\|$.

Ainsi, pour $\|x_0 - x^*\| \leq \varepsilon$, on a $\|xn - x^*\| \leq \varepsilon$ et $\|x_{n+1} - x^*\| \leq K\|x_n - x^*\|$, d'où $\lim_{n\to+\infty} x_n = x^*$.

III.1) a) En utilisant Schwarz, $\widehat{h}(s_1) = \dfrac{\partial h}{\partial s_2}(s_1, d) - \dfrac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, c)$, d'où on conclut aisément.

III.1) b) *Remarque* : La formule de la moyenne est HP.

- On note m et M les minimum et maximum de $\dfrac{\partial^2 h}{\partial s_1 \partial s_2}$ sur $[a, b] \times [c, d]$.

On vérifie alors que l'intégrale double est comprise entre $m(b - a)(d - c)$ et $M(b - a)(d - c)$.

On conclut en montrant que l'image du convexe $[a, b] \times [c, d]$ par $\dfrac{\partial^2 h}{\partial s_1 \partial s_2}$ est convexe (= intervalle).

- Autre solution : appliquer le TAF (ou la formule de la moyenne) deux fois avec $\widehat{h}$, puis avec h.

Remarque : $\widehat{h}$ est continue de façon immédiate par la formule utilisée au a).

III.3) a) Notant que $\int g'(u)\, du = g(u) + k$, il est naturel d'utiliser le changement de variables affine $t = \lambda f(x) +$

$(1-\lambda)f(y)$, c'est-à-dire $\lambda = \dfrac{f(y)-t}{f(y)-f(x)}$. On a notamment $d\lambda = \dfrac{-dt}{f(y)-f(x)}$.

III.3) b) Il s'agit de prouver que $F(x,y) = \int_0^1 g'(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))\, d\lambda$ est continue.

En tout rigueur, on devrait passer par la caractérisation séquentielle.

Il s'agit dans tous les cas d'utiliser le théorème de continuité des intégrales paramétrées.

Il convient donc de poser $\varphi(x,y,\lambda) = g'(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))\, d\lambda$.

Et de majorer $\varphi(x,y,\lambda)$ par une fonction constante donc intégrable en λ sur $[a,b]\times[c,d]\times[0,1]$.

III.3) c) On utilise le théorème de dérivation des intégrales paramétrées pour justifier que les dérivées partielles existent, puis le héorème de continuité des intégrales paramétrées (comme au b)).

III.3) d) $H_f(x,x) = x - f(x)\int_0^1 g'(f(x))\, d\lambda = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$,

qui correspond d'ailleurs à la méthode de la tangente (Newton).

III.4) Il suffit de prouver qu'on peut appliquer 1) b) à H_f sur $[x,x^*]\times[y,x^*]$.

III.4) Les questions 3) b) et 2) permettent de calculer $\dfrac{\partial^2 H_f}{\partial x\partial y}$. On obtient $\dfrac{\partial^2 H_f}{\partial x\partial y}(x^*,x^*) = \dfrac{f''(x)}{2f'(x)}$.

IV.2) b) Question un peu calculatoire mais nécessaire pour faire c) et d).