TD entraînement n°4

Exercice A. Matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: il existe $\boxed{P \in GL_n(\mathbb{C})}$ telle que $P^{-1}AP = B$.

1) Justifier l'existence de deux matrices réelles M et N telles que $\begin{cases} AM = MB \\ AN = NB \\ M + iN \text{ inversible (c'est-à-dire } \in GL_n(\mathbb{C})) \end{cases}$

2) a) On pose $D(t) = \det(M + tN)$. On a $D(i) \neq 0$. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $D(t) \neq 0$.

b) En déduire que A et B sont semblables $\boxed{\text{dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$: il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}AQ = B$.

Exercice B. Réduction des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sans valeur propre réelle

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle sans valeur propre réelle et diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Montrer que n est pair. On pose $n = 2p$.

2) On note $\lambda_1, ..., \lambda_p, \overline{\lambda_1}, ..., \overline{\lambda_p}$ les racines de χ_A. On vérifie (admis ici) qu'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ composée de vecteurs propres de A de la forme $\mathcal{B} = (Z_1, \overline{Z_1}, Z_2, \overline{Z_2}, ..., Z_p, \overline{Z_p})$, avec $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $AZ_k = \lambda_k Z_k$ et$A\overline{Z_k} = \overline{\lambda_k Z_k}$.

a) On pose $Z_k = X_k + iY_k$, avec X_k et $Y_k \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, $X_k = \dfrac{1}{2}(Z_k + \overline{Z_k})$ et $Y_k = \dfrac{1}{2i}(Z_k - \overline{Z_k})$.

Montrer que $(X_1, Y_1, X_2, Y_2, ..., X_p, Y_p)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

c) Montrer que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à une matrice diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

3) Montrer que si $A^2 + I_n = O_n$ alors A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice B diagonale par blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque : On pourra proposer deux preuves : l'une utilisant 2) et l'autre utilisant l'exo A).

4) On propose une troisième preuve de 3).

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie n vérifiant $u^2 + \mathrm{Id} = 0$.

a) Soit F un sev stable de E et $x \notin F$. Montrer que $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan et montrer que $F \oplus \mathrm{Vect}(x, u(x))$.

b) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ est diagonale par blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice C. Preuve du théorème de Cayley-Hamilton

Soient un K-ev E de dimension n et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.

1) Soit F un sev de E stable par u. On note $v : F \to F \quad x \longmapsto u(x)$ l'endomorphisme restriction de u à F.

Montrer que le polynôme caractéristique χ_v de v divise le polynôme caractéristique de u.

2) On fixe désormais $x \in E$. Montrer qu'il existe un plus petit entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $(x, u(x), ..., u^p(x))$ est liée.

On pose $F = \mathrm{Vect}(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$.

Montrer que F est stable par u et admet $\mathcal{B} = (x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ comme base.

3) Soit $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in K^n$. On considère la matrice compagnon $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(K)$.

On *admet* que $\chi_M(X) = X^p - \sum_{j=0}^{p-1} a_j X^j$. En utilisant 1) et 2), montrer que $\boxed{\chi_u(u)(x) = \overrightarrow{0}}$.