Commentaire culturel sur la problématique mathématique :

On considère l'équation générale $(H_z) : \phi(x) - z \int_a^b N(x,y)\phi(y)\ dy = f(x)$ d'inconnue ϕ continue.

L'équation s'écrit

$$(\mathrm{Id} - zA)\phi = f$$

où A est l'opérateur de $C([a,b],\mathbb{C})$ défini par $(A\phi)(x) = \int_a^b N(x,y)\phi(y)\ dy$.

Remarque : Ce type d'opérateur est la version continue du produit matriciel :

$(AY)(i) = \sum_{j=1}^n N(i,j)Y(j)$, associé à la matrice $A = (N(i,j))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$.

En utilisant le th de Fubini, $(A^k\phi)(x) = \int_a^b N_k(x,y)\phi(y)\ dy$, où N_k est défini par récurrence sur k :

$$N_1(x,y) = N(x,y) \text{ et } \forall k \geq 2,\ N_k(x,y) = \int_a^b N(x,s)N_{k-1}(s,y)\ ds$$

Remarque : Il s'agit du principe général de constructions par approximations successives (basé sur une convergence vers un point fixe).

Remarque : Noter l'analogie avec le produit matriciel : $(AB)(i,j) = \sum_{s=1}^n A(i,s)B(s,j)$.

Ici, il s'agit d'un produit ligne-colonne dans sa version continue.

On a pour $|z|$ assez petit, $(\mathrm{Id} - zA)$ est inversible et $\boxed{(\mathrm{Id} - zA)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k A^k}$

On obtient ainsi la formule obtenue au 4 :

$$\phi = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} z^k A^k\right)(f) = f + z\int_a^b \sum_{k=1}^{+\infty}(z^k A^k)(f) = f + z\int_a^b K_z(x,y)f(y)\ dy$$

avec

$$K_z(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} z^{k-1} N_k(x,y)$$