Révision n°7. Commentaire

1a. La résolution proposée ici correspond en effet à un cas particulier, lié à la propriété $e^{x-y} = e^x e^{-y}$.

Elle s'applique en fait à toute équation de la forme $\boxed{\phi(x) - z\lambda(x) \int_a^b \frac{\phi(y)}{\lambda(y)}\, dy = f(x)}$, où $\lambda(x) \neq 0$.

On a $\frac{\phi(x)}{\lambda(x)} - z \int_a^b \frac{\phi(y)}{\lambda(y)}\, dy = \frac{f(x)}{\lambda(x)}$, d'où en intégrant sur $[a, b]$, $(1-z) \int_a^b \frac{\phi(y)}{\lambda(y)}\, dy = \int_a^b \frac{f(x)}{\lambda(x)}\, dx$.

1b. Attention au fait que la condition du 1a est nécessaire, mais n'est pas suffisante.

D'où la nécessité de vérifier que la solution obtenue via 1a convient.

Commentaire culturel : La méthode classique (et plus générale) pour résoudre (E_z) consiste à utiliser une équation différentielle : soit une équation vérifiée par ϕ (comme au 2) soit une équation vérifiée par $F(x) = \int_0^x e^{-y}\phi_z(y)\, dy$:

Pour la seconde méthode : L'application F est de classe C^1 et vérifie $F(0) = 0$.

L'équation (E_z) s'écrit : $e^x F'(x) - ze^x F(x) = f(x)$, c'est-à-dire $F'(x) - zF(x) = e^x f(x)$.

La méthode de variation de la constante permet de trouver $F(x)$ à une constante près K.

La condition $F(0) = 0$ donne l'unique valeur de K qui convient.

2. La dérivation ne donne pas une CNS. Pour éviter d'avoir à faire à la fin une vérification (pour la réciproque), on peut noter que deux fonctions dérivables sont égales ssi elles ont même dérivée et même valeur en 0.

Donc ϕ_z vérifie (F_z) ssi $\phi_z(0) = 1$ et $\phi_z'(x) - z\phi_z(x) = e^x$.

Ensuite, on peut appliquer la méthode de variation de la constante.

Remarque : Si on applique le programme officiel, on peut aussi deviner une solution particulière (à laquelle on ajoutera la solution générale de l'équation homogène).

En effet, l'équation différentielle est une équation différentielle linéaire à coefficients constants et dont le second membre est de la forme $P(x)e^{\lambda x}$, où P polynôme (ici $P = 1$).

Il faut alors distinguer deux cas, selon que λ est ou non racine de l'équation caractéristique, c'est-à-dire si $e^{\lambda x}$ es tou non solution de l'équation homogène.

Lorsque $z \neq 1$, il existe une solution particulière $Q(x)e^{\lambda x}$, avec $\deg Q = \deg P$.

Lorsque $z = 1$, z est racine simple de l'équation caractéristique, et il existe une solution particulière $Q(x)e^{\lambda x}$, avec $\deg Q = 1 + \deg P$, donc de la forme $(\alpha x + \beta)e^x$, avec d'aileurs β arbitraire (cf équation homogène).

3a. Attention : ici E n'est pas supposé de dimension finie, dont la preuve de l'injectivité seule (c'est-à-dire par linéarité : $(\mathrm{Id}_E - zA)x = 0$ implique $x = 0$) ne suffit pas ...

Remarque culturelle : Si deux endomorphismes u et $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $u \circ v = \mathrm{Id}$, alors u est surjective et v injective. Mais u et v ne sont pas nécessairement bijectives.

Par exemple, pour $E = \mathbb{R}[X]$, $u(P) = P'$ et $v(P)(x) = \int_0^x P(t)\, dt$.

Il s'agit de montrer que tout y admet un unique antécédent z, c'est-à-dire on résout $x - z(Ax) = y$.

On trouve une et une solution solution $x = y + \frac{z}{1-z} Ay$.

Attention **:** on pourrait essayer de deviner un inverse de la forme $\alpha \,\mathrm{Id} + \beta A$.

Mais la relation $(\mathrm{Id}_E - zA)(\mathrm{Id}_E + \frac{z}{1-z}A) = \mathrm{Id}$ ne suffit pas à prouver que $(\mathrm{Id}_E - zA)$ est inversible : elle montre seulement que $(\mathrm{Id}_E - zA)$ est surjective, ce qui ne permet pas de conclure en dim infinie.

Il faut donc aussi mentionner que $(\mathrm{Id}_E + \frac{z}{1-z}A)(\mathrm{Id}_E - zA) = \mathrm{Id}$ (les polynômes en A commutent).

3b. Ne pas oublier de justifier que A est bien défini, et donc que $x \longmapsto \int_0^1 e^{x-y}\phi(y)\ dy$ est continue.

La preuve est en fait immédiate ici en notant que $\int_0^1 e^{x-y}\phi(y)\ dy = e^x \int_0^1 e^{-y}\phi(y)\ dy$.

(sans avoir à utiliser les propriétés sur les intégrales paramétrées).

Pour prouver $A^2 = A$, on explicite $A^2\phi(x)$ et on montre que $A^2\phi(x) = A\phi(x)$.

Remarque : En discret, A est correspond à l'endomorphisme associé à une matrice.

Compte tenu de $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$, A correspond à une matrice de la forme $\boxed{M = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{a_i}{a_j}\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}}$.

On a alors $M^2 = M$, c'est-à-dire M matrice de projection (sur une droite).

En effet, par le changement de base $(e_1, ..., e_n) \longmapsto (a_1e_1, ..., a_ne_n)$, la matrice M est semblable à la matrice $J = \dfrac{1}{n}(1)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$, qui elle-même est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, 0, 0, ..., 0)$.

On a bien $(I - zJ)^{-1} = I + \dfrac{z}{1-z}J$, car pour le premier coefficient diagonal : $\dfrac{1}{1-z} = 1 + \dfrac{z}{1-z}$.

D'où aussi par similitude $(I - zA)^{-1} = I + \dfrac{z}{1-z}A$, relation qu'on peut aussi bien sûr vérifier directement.

4a. On a affaire ici à des intégrales paramétrées. D'où l'idée a priori d'utiliser les théorèmes sur la continuité des intégrales paramétrées. Mais les fonctions considérées ici sont des fonctions de deux variables : donc en toute rigueur, on revient à la caractérisation séquentielle de la continuité : on étudie alors des limites de suites d'intégrales en utilisant le th de cv dominée.

Un étudiant qui appliquerait (par extension) le théorème sur la continuité des intégrales paramétrées ne serait sans doute pas ou peu sanctionné.

Attention : Pour prouver que $(x, y) \to N(x, y)$ est continue, il ne suffit pas de prouver que les fonctions partielles $x \to N(x, y)$ et $y \to N(x, y)$ sont continues.

4c. - Attention : ici, il faut d'abord justifier la continuité de $(x, y) \longmapsto K_z(x, y)$ définie par'une série de fonctions.

Comme au 4a, il s'agit de fonctions de deux variables. On peut considérer ici connu le théorème de continuité lorsque la convergence est normale (au voisinage de tout point). Il apparaît d'ailleurs implicitement dans le programme officiel lorsqu'on évoque la continuité d'une série entière (comme fonction de z) sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence.

Ici, la convergence est normale sur tout $[a, b]^2$.

- On est ensuite amener à utiliser le théorème de continuité des intégrales paramétrées pour la continuité de $x \longmapsto \int_a^b K_z(x, t)\ f(t)\ dt$.

- Pour finir, la convergence normale de $t \longmapsto \sum N_k(x, t)z^{k-1}f(t)$ sur le segment $[a, b]$ permet d'intégrer terme à terme : $\int_a^b K_z(x, t)f(t)\ dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b N_k(x, t)z^{k-1}f(t)\ dt$.

Un petit calcul avec Fubini permet de conclure.