

## Révision n°7. Corrigé

1.

*Remarque* : Cette question peut déstabiliser un certain nombre de candidats.

La résolution proposée ici correspond en effet à un cas particulier, lié à la propriété  $e^{x-y} = e^x e^{-y}$ .

1a.

On a  $\int_0^1 e^{x-y} \phi_z(y) dy = e^x \int_0^1 e^{-y} \phi_z(y) dy$ , d'où  $\phi_z(x) - z e^x \xi_z = f(x)$ , c'est-à-dire  $e^{-x} \phi_z(x) - z \xi_z = e^{-x} f(x)$ .

En intégrant sur  $[0, 1]$ , on obtient :  $\xi_z - z \xi_z = \int_0^1 e^{-x} f(x) dx$ , c'est-à-dire  $(1 - z) \xi_z = \int_0^1 e^{-x} f(x) dx$ .

1b.

(analyse) Il résulte de 1a) que si  $\phi_z$  vérifie  $(E_z)$ , alors  $\phi_z(x) = f(x) + z e^x \xi_z$ , où  $\xi_z = \frac{1}{1-z} \int_0^1 e^{-y} f(y) dy$ .

(synthèse) On vérifie que l'application  $\phi_z$  ainsi définie vérifie  $(E_z)$ .

On a :  $\int_0^1 e^{-y} \phi_z(y) dy = \int_0^1 e^{-y} (f(y) + z e^y \xi_z) dy = (1 - z) \xi_z + z \xi_z = \xi_z$ .

d'où  $\phi_z(x) - z \int_0^1 e^{x-y} \phi_z(y) dy = f(x) + z e^x \xi_z - z e^x \xi_z = f(x)$ , d'où le résultat.

**Commentaire culturel** : Voici une méthode directe (sans utiliser 1a) pour résoudre  $(E_z)$  :

Posons  $F(x) = \int_0^x e^{-y} \phi_z(y) dy$ . L'application  $F$  est de classe  $C^1$  et vérifie  $F(0) = 0$ .

L'équation  $(E_z)$  s'écrit :  $e^x F'(x) - z e^x F(x) = f(x)$ , c'est-à-dire  $F'(x) - z F(x) = e^{-x} f(x)$ .

La méthode de variation de la constante permet de trouver  $F(x)$  à une constante près  $K$ .

2.

Supposons que  $\phi_z$  vérifie  $(F_z)$ .

Comme  $x \mapsto \int_0^x \phi_z(y) dy$  est de classe  $C^1$ , donc  $\phi_z(x) = e^x + z \int_0^x \phi_z(y) dy$  est aussi de classe  $C^1$ .

En dérivant, on obtient :  $\phi'_z(x) - z \phi_z(x) = e^x$ .

Deux fonctions dérivables sont égales ssi elles ont même dérivée et même valeur en 0.

Donc  $\phi_z$  vérifie  $(F_z)$  ssi  $\phi_z(0) = 1$  et  $\phi'_z(x) - z \phi_z(x) = e^x$ .

On peut utiliser la méthode de variation de la constante : en posant  $\phi_z(x) = y(x) e^{zx}$ ,

on obtient  $y'(x) = e^{x(1-z)}$ , et on distingue alors les cas  $z \neq 1$  et  $z = 1$ .

*Premier cas* :  $z \neq 1$

On obtient  $\phi_z(x) = \frac{1}{1-z} e^x + K e^{zx}$ , avec  $K$  constante. Mais  $\phi_z(0) = 1$ .

Donc l'unique solution de  $(F_z)$  est  $\phi_z(x) = \frac{1}{1-z} e^x - \frac{z}{1-z} e^{zx}$ .

*Second cas* :  $z = 1$

On obtient  $\phi_z(x) = x e^x + K e^x$ .

Donc l'unique solution de  $(F_z)$  est  $\phi_z(x) = (x + 1) e^x$ .

*Remarque* : On est ici avec  $z = 1$  dans un cas où il y a "résonance" : on sait d'ailleurs (par le cours) qu'il existe une solution particulière de la forme  $\beta x e^x$ .

Alors que dans le premier cas (sans résonance), il existe une solution particulière de la forme  $\alpha e^x$ .

### 3a.

Soit  $y \in E$ . On cherche à résoudre :  $x - z(Ax) = y$ .

En composant par  $A$ , on obtient  $Ax - z(Ax) = Ay$ , c'est-à-dire  $Ax = \frac{1}{1-z}Ay$ .

D'où nécessairement (en réinjectant dans l'équation) :  $x = \frac{z}{1-z}Ay + y$ .

Réciproquement, si  $x = \frac{z}{1-z}Ay + y$ , alors  $x - z(Ax) = (\frac{z}{1-z}Ay + y) - z(\frac{z}{1-z}Ay + y) = y$ .

Donc  $\text{Id}_E - zA$  est bijectif (tout élément  $y \in E$  admet un et un seul antécédent).

Et  $(\text{Id}_E - zA)^{-1} = \text{Id}_E + \frac{z}{1-z}A$ .

**Commentaire :** Attention, ici  $E$  n'est pas supposé de dimension finie, dont la preuve de l'injectivité seule ne suffit pas ...

**Remarque culturelle :** Si deux endomorphismes  $u$  et  $v \in \mathcal{L}(E)$  vérifie  $u \circ v = \text{Id}$ , alors  $u$  est surjective et  $v$  injective. Mais  $u$  et  $v$  ne sont pas nécessairement bijectives.

Par exemple, pour  $E = \mathbb{R}[X]$ ,  $u(P) = P'$  et  $v(P)(x) = \int_0^x P(t) dt$ .

### 3b.

Pour prouver que  $A$  est bien défini, il faut justifier que  $x \mapsto \int_0^1 e^{x-y}\phi(y) dy$  est continue.

Or, on a  $\int_0^1 e^{x-y}\phi(y) dy = e^x \int_0^1 e^{-y}\phi(y) dy$ .

La continuité est donc immédiate sans avoir à utiliser les propriétés sur les intégrales paramétrées.

La linéarité de  $A$  résulte de la linéarité de  $\phi \mapsto e^{-y}\phi$  et de la linéarité de l'intégrale.

Enfin,  $A^2\phi(x) = \int_0^1 e^{x-y} \left( e^y \int_0^1 e^{-u}\phi(u) du \right) dy = \left( \int_0^1 e^{-u}\phi(u) du \right) \int_0^1 e^x dy = e^x \int_0^1 e^{-y}\phi(y) dy = A\phi(x)$

Donc  $A^2 = A$ .

Lorsque  $z \neq 1$ , par 2,  $\text{Id}_E - zA$  de  $E$  est inversible et  $(\text{Id}_E - zA)^{-1} = \text{Id}_E + \frac{z}{1-z}A$ .

Or,  $\phi_z$  solution de  $(F_z)$  est un antécédent de  $f$  par  $(\text{Id}_E - zA)$ .

On retrouve bien l'unique solution :

$$\phi_z(x) = \left( \text{Id}_E + \frac{z}{1-z}A \right) (f)(x) = f(x) + \frac{z}{1-z}e^x \int_0^1 e^{-y}f(y) dy = f(x) + ze^x\xi_z$$

## Troisième partie : équations intégrales, le cas général

### 4a.

**Commentaire :** On a affaire ici à des intégrales paramétrées. D'où l'idée a priori d'utiliser les théorèmes sur la continuité des intégrales paramétrées. Mais les fonctions considérées ici sont des fonctions de deux variables : donc en toute rigueur, on revient à la caractérisation séquentielle de la continuité : on étudie alors des limites de suites d'intégrales en utilisant le th de cv dominée.

On montre par récurrence sur  $k$  que  $N_k$  est bien définie et continue sur  $[a, b]^2$ .

La propriété est immédiate pour  $k = 0$  et  $k = 1$ . Supposons  $k \geq 2$  et  $N_{k-1}$  continue sur  $[a, b]^2$ .

Pour  $(x, y) \in [a, b]^2$ , l'intégrale  $\int_a^b N(x, s)N_{k-1}(s, y) ds$  est bien définie (intégrale d'une fonction continue en  $s$  sur un segment).

Pour prouver la continuité de  $N_k$ , on utilise la *caractérisation séquentielle* :

Soit une suite  $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $(x, y)$  dans  $[a, b]^2$ .

Posons  $I_n = \int_a^b N(x_n, s)N_{k-1}(s, y_n) ds$ .

On a  $\forall s \in [a, b]$ ,  $N(x_n, s)N_{k-1}(s, y_n) \leq M \sup_{[a, b]^2} |N_{k-1}| = \varphi(s)$ , avec  $\varphi$  intégrable sur  $[a, b]$ .

Par convergence dominée,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_a^b N(x, s)N_{k-1}(s, y) ds$ .

On en déduit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_k(x_n, y_n) = N_k(x, y)$ , et on en conclut que  $N_k$  est continue.

#### 4b.

On vérifie aisément par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$  que  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall (x, y) \in [a, b]^2$ ,  $|N_k(x, y)| \leq M^k(b-a)^{k-1}$ .

Donc  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sup_{(x, y, z) \in [a, b]^2 \times D(0, R)} |N_k(x, y)z^{k-1}| \leq M^k R^{k-1}(b-a)^{k-1}$ .

On choisit  $R$  de sorte que  $MR(b-a) < 1$ . Alors  $\sum N_k(x, y)z^{k-1}$  converge normalement sur  $[a, b]^2 \times D(0, R)$ .

#### 4c.

- Comme les  $(x, y, z) \mapsto N_k(x, y)z^{k-1}$  sont continues, alors  $(x, y, t) \mapsto K_z(x, y)$  est continue (par les propriétés sur les séries de fonctions continues convergeant normalement).

D'où l'existence de  $\psi_z(x) = \int_a^b K_z(x, t) f(t) dt$ .

- D'autre part,  $(x, t) \mapsto K_z(x, t)$  est bornée sur le compact  $[a, b]^2$ .

On a  $\forall x \in [a, b]$ ,  $\forall t \in [a, b]$ ,  $|K_z(x, t)f(t)| \leq \sup_{(x, t) \in [a, b]^2} |K_z(x, t)| f(t) = \varphi(t)$ , avec  $\varphi$  intégrable sur  $[a, b]$ .

Donc  $\psi_z : x \mapsto \int_a^b K_z(x, t) f(t) dt$  est continue par le théorème de continuité des intégrales paramétrées.

- La fonction  $f$  est bornée sur  $[a, b]$ , donc  $t \mapsto \sum N_k(x, t)z^{k-1}f(t)$  converge normalement sur  $[a, b]$ .

D'où  $\psi_z(x) = \int_a^b K_z(x, t)f(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b N_k(x, t)z^{k-1}f(t) dt$ .

On a de même  $z \int_a^b N(x, y)\psi_z(y) dy = z \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b N(x, y) \left( \int_a^b N_k(y, t)z^{k-1}f(t) dt \right) dy$ .

Par Fubini,  $\int_a^b N(x, y) \left( \int_a^b N_k(y, t)z^{k-1}f(t) dt \right) dy = \int_a^b \left( \int_a^b N(x, y)N_k(y, t) \psi_z(y) dy \right) z^{k-1}f(t) dt$ .

Donc  $z \int_a^b N(x, y)\psi_z(y) dy = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b N_{k+1}(x, t)z^k f(t) dt = \sum_{k=2}^{+\infty} \int_a^b N_k(x, t)z^{k-1}f(t) dt$ .

Donc  $z \int_a^b N(x, y)\psi_z(y) dy = \psi_z(y) - \int_a^b N_1(x, t)f(t) dt = \psi_z(y) - \int_a^b N(x, t)f(t) dt$ .

#### 4d.

Posons  $\phi_z(x) = f(x) + z\psi_z(x)$ .

Par 4c,  $\phi_z(x) = f(x) + z \left( z \int_a^b N(x, y)\psi_z(y) dy + \int_a^b N(x, t)f(t) dt \right) = f(x) + z \int_a^b N(x, y)(f(y) + z\psi_z(y)) dy$ .

On obtient bien :  $\phi_z(x) = f(x) + z \int_a^b N(x, y)\phi_z(y) dy$ , c'est-à-dire  $\phi_z$  solution de l'équation  $(H_z)$ .