

Méthode de Fredholm pour l'étude de certaines équations intégrales (extrait X PC 2010)

On note  $D(0, R)$  l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que  $|z| \leq R$ .

Première partie : exemples d'équations intégrales

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. [2 pts] Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. Considérons l'équation intégrale de paramètre  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 1$ , et de fonction inconnue  $\phi_z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  continue :

$$(E_z) : \phi_z(x) - z \int_0^1 e^{x-y} \phi_z(y) dy = f(x)$$

1a. Posons  $\xi_z = \int_0^1 e^{-y} \phi_z(y) dy$ . Ecrire une relation simple exprimant  $\xi_z$  en fonction de  $z$  et  $f$ .

1b. En déduire que si  $z \neq 1$ ,  $(E_z)$  possède une et une seule solution qu'on explicitera.

2. [2 pts] Considérons l'équation intégrale de paramètre  $z \in \mathbb{C}$  et de fonction inconnue  $\phi_z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  continue :

$$(F_z) : \phi_z(x) - z \int_0^x \phi_z(y) dy = e^x$$

Montrer que si  $\phi_z$  est solution de  $(F_z)$ ,  $\phi_z$  vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

En déduire les solutions de  $(F_z)$ . On distinguera les cas  $z \neq 1$  et  $z = 1$ .

Deuxième partie : quelques considérations d'algèbre linéaire

3a. [1.5 pt] Soit  $A$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  vérifiant  $A^2 = A$ .

Montrer que lorsque  $z \neq 1$ , l'endomorphisme  $\text{Id}_E - zA$  de  $E$  est inversible et donner son inverse.

3b. [1.5 pt] On note  $C([0, 1], \mathbb{C})$  l'espace des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs complexes.

Considérons l'opérateur  $A : C([0, 1], \mathbb{C}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{C})$   $\phi \mapsto A\phi$  défini par

$$A\phi(x) = \int_0^1 e^{x-y} \phi(y) dy$$

Montrer que  $A$  est bien défini, linéaire et vérifie  $A^2 = A$ .

Montrer que lorsque  $z \neq 1$ , l'endomorphisme  $\text{Id}_E - zA$  de  $E$  est inversible.

Retrouver le résultat de la question 1b.

Troisième partie : équations intégrales, le cas général

**Théorème de Fubini** (*admis*) : Soit  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. Alors

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Cette propriété se généralise aux intégrales multiples : Pour toute permutation  $\sigma$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\int \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n = \int \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{\sigma(1)} dx_{\sigma(2)} dx_{\sigma(3)} \dots dx_{\sigma(n)}$$

Dans la suite du problème, on considère un intervalle fermé borné  $[a, b]$ , une fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,

et une fonction continue  $N : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . On note

$$M = \sup_{(x, y) \in [a, b]^2} |N(x, y)|$$

**Considérons l'équation intégrale** de paramètre  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 1$ , et d'inconnue  $\phi_z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  continue :

$$\boxed{(H_z) : \phi_z(x) - z \int_a^b N(x, y) \phi_z(y) dy = f(x)}$$

Posons, pour  $(x, y) \in [a, b]^2$ ,  $N_0(x, y) = 1$  et  $N_1(x, y) = N(x, y)$ , et par récurrence,

$$\forall k \geq 2, N_k(x, y) = \int_a^b N(x, s) N_{k-1}(s, y) ds$$

Posons pour  $z \in \mathbb{C}$  et  $(x, y) \in [a, b]^2$ ,

$$K_z(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} N_k(x, y) z^{k-1}$$

**4a.** [1.5 pt] Montrer que les fonctions  $N_k$  sont bien définies et continues sur  $[a, b]^2$ .

**4b.** [1.5 pt] Montrer qu'il existe  $R > 0$  tel que  $\sum N_k(x, y) z^{k-1}$  converge normalement sur  $[a, b]^2 \times D(0, R)$ .

*Ind* : On pourra majorer  $|N_k|$  sur  $[a, b]^2$  en utilisant la constante  $M$  introduite plus haut.

**4c.** [2 pts] Pour tout  $z \in D(0, R)$  et  $x \in [a, b]$ , posons  $\boxed{\psi_z(x) = \int_a^b K_z(x, t) f(t) dt}$ .

Montrer que  $\psi_z$  est bien définie, continue sur  $[a, b]$  et que

$$z \int_a^b N(x, y) \psi_z(y) dy = \psi_z(x) - \int_a^b N(x, t) f(t) dt$$

**4d.** [1.5 pt] En déduire que pour tout  $z$  de module strictement inférieur à  $R$ ,  $\phi_z$  définie par

$$\phi_z(x) = f(x) + z\psi_z(x)$$

est solution de l'équation  $(H_z)$ .