

Révision n°6 bis. Corrigé

1) On calcule le polynôme caractéristique $\chi(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & -1 \\ -1 & -1 & x+1 \end{vmatrix}$.

En développant selon la première colonne, $\chi(x) = x(x^2 - 2) - (-(x-1)) = x^3 - x - 1$.

On étudie la fonction polynôme $x \mapsto \chi(x) = x^3 - x - 1$. On a $\chi'(x) = 3x^2 - 1$, donc χ' s'annule en $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

On a $\chi(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 < 0$ et $\chi(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 < 0$.

Par le th de la bijection appliqué sur les intervalles $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ et $[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$, on en déduit que χ admet un unique zéro λ sur \mathbb{R} , et que $\lambda > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Mais on a aussi $\chi(1) = -1 < 0 < 3 = \chi(2)$, donc par le TVI, $\lambda \in]1, 2[$.

2) Les racines complexes de χ sont donc λ , σ et $\bar{\sigma}$. On a $\chi(x) = (x - \lambda)(x - \sigma)(x - \bar{\sigma})$.

Par les relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé, on a $\lambda\sigma\bar{\sigma} = 1$, c'est-à-dire $\lambda|\sigma|^2 = 1$.

Comme $\lambda \in]1, 2[$, on en déduit $\frac{1}{\sqrt{2}} < |\sigma| < 1$.

3) Par le th de Cayley-Hamilton, on a $\chi_M(M) = O_3$, c'est-à-dire $M^3 = M + I_3$.

4.a) En multipliant par M^n , on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^{n+3} = M^{n+1} + M^n$. Donc $u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$ par linéarité de tr .

4.b) v_n dépend uniquement de la parité de u_n . On en déduit que v_{n+3} est entièrement défini par v_{n+1} et v_n .

Comme $(v_7, v_8, v_9) = (v_0, v_1, v_2)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+7} = v_n$ par récurrence immédiate d'ordre 3.

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique de période 7.

4.c) $v_{7k} + \dots + v_{7k+6} = v_0 + v_1 + \dots + v_6 = -1$. Donc $\omega_{7q} = q \sum_{n=0}^6 v_n = -q$, et $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

5.a) Par trigonalisation dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on a $M \sim \begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & \sigma & * \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{pmatrix}$, d'où $M^n \sim \begin{pmatrix} \lambda^n & * & * \\ 0 & \sigma^n & * \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}^n \end{pmatrix}$.

Donc $u_n = \lambda^n + \sigma^n + \bar{\sigma}^n = \lambda^n + 2\text{Re}(\sigma^n)$.

5.b) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^n = 0$, donc $u_n = \lambda^n + o_{+\infty}(1)$.

Donc $\cos(2\pi\lambda^n) = \cos(2\pi u_n + o_{+\infty}(1)) = \cos(2\pi u_n) \cos(o_{+\infty}(1)) + \sin(2\pi u_n) \sin(o_{+\infty}(1))$.

Comme \sin et \cos sont bornées, on obtient $\cos(2\pi\lambda^n) = \cos(2\pi u_n) + o_{+\infty}(1) = 1 + o_{+\infty}(1)$, car $u_n \in \mathbb{N}$.

De même, $\cos(\pi\lambda^n) = \cos(\pi u_n) + o_{+\infty}(1) = v_n + o_{+\infty}(1)$. Comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, $(\cos(\pi\lambda^n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge aussi.

6.a) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $|\cos(2\pi x^n)| \leq 1 = \varphi(x)$, avec φ intégrable sur $[\alpha, \beta]$.

Par convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \int_{\alpha}^{\beta} 1 dx = \beta - \alpha$.

6.b) *Remarque* : Il s'agit d'une preuve indépendante des questions précédentes et de même nature que celle du lemme de Lebesgue (qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \cos(\lambda t) dt = 0$).

Avec $u = x^n$, c'est-à-dire $x = u^{1/n}$, on a $J(x^n) = \frac{1}{n} \int_{\alpha^n}^{\beta^n} u^{1/n-1} \cos(2\pi u) du$.

Par une IPP, $\frac{1}{n} \int_{\alpha^n}^{\beta^n} u^{1/n-1} \cos(2\pi u) du = \frac{1}{2\pi n} [u^{1/n-1} \sin(2\pi u)]_{\alpha^n}^{\beta^n} du + \frac{1}{2\pi n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_{\alpha^n}^{\beta^n} u^{1/n-2} \sin(2\pi u) du$.

On a $[\alpha^n, \beta^n] \subset [1, +\infty[$.

On a $\forall u \geq 1$, $|u^{1/n-1} \sin(2\pi u)| \leq 1$. Donc $\left| \frac{1}{2\pi n} [u^{1/n-1} \sin(2\pi u)]_{\alpha^n}^{\beta^n} \right| \leq \frac{1}{\pi n}$.

Pour $n \geq 2$, $\left| \int_{\alpha^n}^{\beta^n} u^{1/n-2} \sin(2\pi u) du \right| \leq \int_{\alpha^n}^{\beta^n} |u^{1/n-2} \sin(2\pi u)| du \leq \int_1^{+\infty} u^{1/n-2} du \leq \int_1^{+\infty} u^{-3/2} du$.

On en conclut que $J_n = O_{+\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$.

6.c) On en déduit que l'hypothèse faite au 6.a) est fautive pour tout intervalle $[\alpha, \beta]$, avec $1 \leq \alpha < \beta$.

Donc pour tous $1 \leq \alpha < \beta$, il existe $x \in [\alpha, \beta]$ tel que $(\cos(2\pi x^n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 1.

Autrement dit, Δ est dense dans $[1, +\infty[$, car il rencontre tout intervalle $[\alpha, \beta] \subset [1, +\infty[$, avec $\alpha < \beta$.