

Partie I

On considère la matrice réelle $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M possède une unique valeur propre réelle λ , et que $\lambda \in [1, 2]$.

2. Soit σ une valeur propre complexe non réelle de M .

Calculer $\lambda |\sigma|^2$ et comparer $|\sigma|$, 1 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Exprimer (en utilisant le cours) M^3 comme combinaison linéaire à coefficients entiers de I_3 et M .

4.a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \text{tr}(M^n)$ et $v_n = \cos(\pi u_n)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$.

On en déduit aisément (admis ici) que $(u_0, u_1, \dots, u_9) = (3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12)$.

Et on a donc $(v_0, v_1, \dots, v_9) = (-1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, 1)$.

4.b) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique, et préciser sa période.

5.a) Exprimer u_n en fonction de λ , σ et n .

5.b) Montrer que la suite $(\cos(2\pi\lambda^n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1 et que $(\cos(\pi\lambda^n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Partie II

6. Soient α et β deux nombres réels tels que $1 \leq \alpha < \beta$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \int_{\alpha}^{\beta} \cos(2\pi x^n) dx$.

6.a) On suppose dans cette seule question 6.a) que $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(2\pi x^n) = 1$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \beta - \alpha$.

6.b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$.

6.c) On note Δ l'ensemble des $\lambda \in [1, +\infty[$ tels que $(\cos(2\pi\lambda^n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 1.

Que peut-on déduire quant à Δ des deux questions précédentes ?