

## Révision n°6 bis. Corrigé

1) La sphère  $S = \{x \in F \mid \|x\| = 1\}$  est une partie fermée bornée de  $F$ , car  $x \mapsto \|x\|$  est continue.

De même  $S' = \{y \in G \mid \|y\| = 1\}$  est fermé borné de  $G$ .

Donc  $(S, S')$  est une partie fermée bornée de l'espace vectoriel  $F \times G$ .

On considère  $f : S \times S' \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ .

La fonction  $f$  est bilinéaire donc continue (on revient aux coordonnées  $\sum_{k=1}^n x_k y_k$  si besoin).

Par le th des bornes atteintes, la fonction continue  $f$  est bornée sur  $S \times S'$  et atteint ses bornes.

D'où l'existence de  $(x_1, y_1)$  tel que  $f(x_1, y_1) = \sup_{S \times S'} f$ .

**2) Il suffit d'appliquer 1) à des sev bien choisis : inutile de refaire le raisonnement du 1) !**

On pose  $F' = F \cap (\mathbb{R}x_1)^\perp$  et  $G' = G \cap (\mathbb{R}y_1)^\perp$ .

On a  $F = F' \oplus \mathbb{R}x_1$  (somme orthogonale), donc  $\dim F' = (\dim F) - 1 \geq 1$ .

De même,  $\dim G' = (\dim G) - 1 \geq 1$ .

Et on a  $\Delta_2 = \{(x, y) \in F' \times G' \mid \|x\| = \|y\| = 1\}$ .

On peut donc appliquer 1) à  $(F', G')$ , d'où l'existence de  $(x_2, y_2)$ .

**3) a)** Par Cauchy-Schwarz,  $\forall (x, y) \in \Delta_1$ ,  $\langle x, y \rangle \leq 1$ , avec égalité **ssi**  $x = y$  (car ils ont même norme).

Or, cette valeur est atteinte en prenant  $(x, x)$ , où  $x \in F \cap G$  unitaire. Donc  $x_1 = y_1$ .

b) On reprend les notations de 2). On sait que  $\dim F' \geq 1$  et  $\dim G' \geq 1$ .

Le même raisonnement qu'au a) s'applique à  $\Delta_2 = \{(x, y) \in F' \times G' \mid \|x\| = \|y\| = 1\}$ .

**4) a)** On a  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $z(t) \in F$  et  $\|z(t)\| = 1$ . De plus,  $z(0) = x_1$ .

Donc, par définition de  $x_1$ , l'application  $\phi : t \mapsto \langle z(t), y_1 \rangle$  atteint son maximum en  $t = 0$ .

Or,  $\frac{d}{dt}(\|x_1 + tx_2\|^{-1}) = \frac{d}{dt} \left( (\|x_1 + tx_2\|^2)^{-1/2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{2t \|x_2\|^2}{\|x_1 + tx_2\|^3}$ , car  $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$ .

Donc  $z'(0) = \frac{1}{\|x_1\|} x_2$ . Et donc  $\phi'(0) = \langle z'(0), y_1 \rangle = \frac{1}{\|x_1\|} \langle x_2, y_1 \rangle$ .

Comme  $\phi$  atteint son maximum en  $t = 0$ , alors  $\phi'(0) = 0$ , donc  $\langle x_2, y_1 \rangle = 0$ .

b) Comme par définition  $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$ , alors  $x_1 \in \text{Vect}(x_2, y_2)^\perp$ .

Comme  $F$  et  $G$  jouent un rôle symétrique  $y_1 \in \text{Vect}(x_2, y_2)^\perp$ .

Donc  $\text{Vect}(x_1, y_1) \subset \text{Vect}(x_2, y_2)^\perp$ , c'est-à-dire  $\text{Vect}(x_1, y_1)$  et  $\text{Vect}(x_2, y_2)$  orthogonaux.