Révision n°6 bis. *Durée 0h40mn, inspiré du début du sujet X MP 2022*

Soient F et G deux sev d'un espace euclidien E de dimension $d \geq 1$.

1) On pose $\Delta_1 = \{(x, y) \in F \times G \mid \|x\| = \|y\| = 1\}$. Montrer qu'il existe $(x_1, y_1) \in \Delta_1$ tel que

$$\langle x_1, y_1 \rangle = \sup_{(x,y)\in\Delta_1} \langle x, y \rangle$$

2) On se place **désormais** dans le cas où $d \geq 2$.

On définit $(x_1, y_1) \in F \times G$ par 1). On pose $\Delta_2 = \{(x, y) \in \Delta_1 \mid \langle x_1, x \rangle = 0 \text{ et } \langle y_1, y \rangle = 0\}$.

Montrer qu'il existe $(x_2, y_2) \in \Delta_2$ tels que

$$\langle x_2, y_2 \rangle = \sup_{(x,y)\in\Delta} \langle x, y \rangle$$

3) a) Montrer que si $\dim(F \cap G) \geq 1$, alors $x_1 = y_1$.

b) Montrer que si $\dim(F \cap G) \geq 2$, alors $x_2 = y_2$.

4) a) Montrer que y_1 est orthogonal à x_2.

Indication : Pour t réel, on pourra considérer $z(t) = \dfrac{x_1 + tx_2}{\|x_1 + tx_2\|}$ et sa dérivée.

b) En déduire que $\mathrm{Vect}(x_1, y_1)$ et $\mathrm{Vect}(x_2, y_2)$ sont orthogonaux.