

Révision n°5 ter. Corrigé

1) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Par le théorème spectral, il existe une BON (Z_1, \dots, Z_n) de vecteurs propres de A .

Pour $X = \sum_{k=1}^n x_k Z_k$, on a $X^T A X = (X \mid A X) = (\sum_{k=1}^n x_k Z_k \mid \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k Z_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2$.

Les λ_k sont > 0 . Donc $X^T A X \geq 0$, avec égalité ssi les x_k sont nuls, donc ssi X est nul.

Réciproquement, supposons $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, X^T A X > 0$.

Soit X un vecteur propre de A de valeur propre λ . Alors $X^T A X = \lambda \|X\|^2 > 0$, donc $\lambda > 0$, car X non nul.

2) a) Soient A et $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in [0, 1]$. Posons $C = \lambda A + (1 - \lambda)B$.

Soit X non nul. On a $(X \mid C X) = \lambda(X \mid A X) + (1 - \lambda)(X \mid B X)$.

Il s'agit de la somme de deux termes positifs dont au moins un n'est pas nul. Donc $(X \mid C X) > 0$.

Ainsi, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ce n'est pas un sev : $I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ mais $-I_n \notin S_n^{++}(\mathbb{R})$.

b) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in D_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = U D U^T$.

Donc $A^{-1} = U D^{-1} U^T$. Ainsi, A^{-1} est symétrique et $\text{Sp}(A^{-1}) \subset \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire $A^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

3) Montrons la propriété par récurrence sur p . Pour $p = 1$, elle est immédiate.

Pour $p = 2$, il s'agit de la définition de la convexité. Supposons la propriété vraie au rang p , avec $p \geq 2$.

On va utiliser l'associativité des valeurs moyennes.

On suppose $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1$, avec $\lambda_{p+1} > 0$ (sinon immédiat par hyp de rec), et on écrit :

$$\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i + \mu y, \text{ où } \mu = \lambda_p + \lambda_{p+1} \text{ et } y = \frac{\lambda_p x_p + \lambda_{p+1} x_{p+1}}{\lambda_p + \lambda_{p+1}}.$$

Par hypothèse de récurrence, on a $f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i) + \mu f(y)$.

Par définition de la convexité, $f(y) \leq \frac{\lambda_p f(x_p) + \lambda_{p+1} f(x_{p+1})}{\lambda_p + \lambda_{p+1}} = \frac{1}{\mu} (\lambda_p f(x_p) + \lambda_{p+1} f(x_{p+1}))$.

Donc on obtient bien $f\left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i f(x_i)$.

Remarque : Lorsque f est C^1 , la preuve la plus simple consiste à utiliser $f \geq L$, où L est la tangente en la valeur moyenne $\hat{x} = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$. Dans le cas général, on peut trouver une droite L analogue mais il faut la construire (en prenant la droite passant par \hat{x} et de pente comprise entre $f'_g(\hat{x})$ et $f'_d(\hat{x})$).

4) La fonction \ln est concave car $\ln'' < 0$.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On a $\text{tr } A = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ et $\det A = \prod_{k=1}^n \lambda_k$.

Donc $\ln\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(\lambda_k)$. En composant par \exp croissante, on a $\frac{1}{n} \text{tr}(A) \geq (\det A)^{1/n}$.

5) a) On a $A^{-1}B = S^2 B = S(SBS)S^{-1}$, donc $A^{-1}B$ semblable à la matrice symétrique SBS .

On en déduit que $A^{-1}B$ diagonalisable.

Remarque culturelle : en fait, $A^{-1}B$ est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire défini par la matrice symétrique positive A : autrement dit, avec $\langle X, Y \rangle = (X | AY)$, on a :

$$\langle X, A^{-1}BY \rangle = \langle XA^{-1}B, Y \rangle, \text{ car } \langle X, A^{-1}BY \rangle = (X | BY) \text{ symétrique en } (X, Y).$$

b) On a $SAS = I_n$. D'autre part, SBS est symétrique, donc par le th spectral, il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $U^T(SAS)U = D \in D_n(\mathbb{R})$.

Mais on a aussi $U^T(SAS)U = U^T I_n U = I_n$. Donc $P = SU \in GL_n(\mathbb{R})$ convient (car $S = S^T$).

6) a) Posons $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$. On a $f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ croissante sur \mathbb{R} , donc f convexe.

b) L'idée est déjà d'essayer d'appliquer a) dans le même esprit qu'au 4).

On a donc $f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$, et en composant par exp, on obtient

$$1 + \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + \exp(x_k))\right)^{1/n}$$

En prenant $x_k = \ln \lambda_k$, on obtient donc

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n \lambda_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + \lambda_k)\right)^{1/n}$$

Ce qui correspond à la formule lorsque $A = I_n$ et $B = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

On va se ramener à cette situation en utilisant 5).

On peut utiliser 5) a) ou 5) b) au choix :

- Avec 5) a) : on a $\det(A + B) = \det(A) \det(I_n + A^{-1}B)$.

Il faut donc prouver que les valeurs propres de $A^{-1}B$ sont strictement positives :

Or, on a $\text{Sp}(A^{-1}B) = \text{Sp}(SBS) \neq 0$, et $\forall X (X | S^T B S) = (SX)^T B (SX) > 0$, car $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $SX \neq 0$.

On a donc $\det(I_n + A^{-1}B)^{1/n} \geq 1 + \det(A^{-1}B)^{1/n}$.

Ce qui permet de conclure en multipliant les deux termes par $\det(A)^{1/n}$.

- Avec 5) b) : En effet, on a $P^T A P = I_n$ et $P^T B P = D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Donc $\det(I_n + D) = (\det P)^2 \det(A + B)$ et $1 = (\det P)^2 \det(A)$ et $\det D = (\det P)^2 \det(B)$.

On vient de voir précédemment que $\det(I_n + D)^{1/n} \geq 1 + \det(D)^{1/n}$, ce qui permet de conclure.