

Révision n°5 ter. Durée 1h15mn, inspiré de Mines PC

On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire canonique $(X | Y) = X^T Y$.

On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques dont le spectre est inclus dans \mathbb{R}_+^* .

On note $D_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $D_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales à coefficients diagonaux strictement positifs.

1) Question de cours : Montrer que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ssi $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, X^T A X > 0$.

2) a) Montrer que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

b) Montrer que si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

3) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe (où I intervalle de \mathbb{R}). Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}_+^p$ tel

que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, et pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in I^p$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i)$$

Indication : On pourra raisonner par récurrence sur p .

4) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\frac{1}{n} \operatorname{tr}(A) \geq (\det A)^{1/n}$.

Indication : On pourra utiliser la convexité de $x \mapsto -\ln x$ sur $]0, +\infty[$.

5) Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$.

Comme $A^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on sait qu'il existe une matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^{-1} = S^2$.

a) En utilisant SBS , montrer que $A^{-1}B$ est diagonalisable.

b) Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in D_n(\mathbb{R})$ telles que

$$P^T A P = I_n \quad \text{et} \quad P^T B P = D$$

6) a) Montrer que $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur \mathbb{R} .

b) Montrer que pour toutes matrices A et $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on a

$$\det(A + B)^{1/n} \geq \det(A)^{1/n} + \det(B)^{1/n}$$