

Révision n°5. Corrigé

Problème

A.1) a) Considérons la fonction $f : t \mapsto (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}$.

f est intégrable sur $]0, 1]$ car en $t = 0$, $f(t) \sim (\ln t)^n t^{x-1} = O(t^{\varepsilon-1})$, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}x > 0$.

f est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $f(t) = O_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

b) Posons $g(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$.

- Pour tout t , l'application $x \mapsto g(x, t)$ de classe C^∞ et $\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, t) = (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x > 0$, l'application $t \mapsto \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, t)$ est par a) intégrable sur $]0, +\infty[$.

- De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$,

$$\forall t > 0, \left| \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \varphi_n(t), \text{ où } \varphi_n(t) = \begin{cases} |\ln t|^n t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t \in]0, 1] \\ (\ln t)^n t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Par a), φ_n est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$, donc sur $]0, +\infty[$.

On en déduit par le th sur les intégrales paramétrées que $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$ est de classe C^∞ .

A.2) Avec le changement de variable $u = \alpha t$, $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha^n} \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^n}$.

B.1) Il suffit de donner des équivalents en 0 et en 1 permettant de comparer avec les intégrales de Riemann.

On a en effet $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim_0 t^{x-1}$ et $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim_1 (1-t)^{y-1}$.

B.2) On utilise le changement de variable $t = 1 - u$. On a $dt = -du$.

Donc $\beta(x, y) = \int_1^0 (1-u)^{x-1} u^{y-1} (-du) = \int_0^1 u^{y-1} (1-u)^{x-1} du = \beta(y, x)$.

B.3) Par une IPP sur $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ et en faisant tendre ε vers 0^+ , on obtient : $\beta(x+1, y) = \frac{x}{y+1} \beta(x, y+1)$.

Une IPP permet ainsi de relier $\beta(x+1, y)$ et $\beta(x, y+1)$, relation où la valeur de la somme des deux arguments est conservée. Des IPP ne peuvent pas suffire. Il faut donc trouver un argument supplémentaire.

L'idée est de noter que $t + (1-t) = 1$, ce qui permet d'obtenir $\beta(x, y) = \beta(x+1, y) + \beta(x, y+1)$.

Donc $\beta(x+1, y) = \frac{x}{y+1} (\beta(x, y) - \beta(x+1, y))$, donc $\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y+1} \beta(x, y)$.

B.4) Il suffit d'appliquer deux fois la relation du 3) combinée avec 2) :

$$\beta(x, y) = \beta(x+1, y+1) = \frac{x}{x+y+1} \beta(x, y+1) = \frac{x}{x+y+1} \frac{y}{x+y} \beta(x, y).$$

C.1) Il faut bien préciser l'argument qui utilise les relations fonctionnelles sur β et sur Γ .

C.2) Noter au passage que $t = \frac{u}{1+u} = 1 - \frac{1}{1+u}$, donc $dt = \frac{1}{(1+u)^2} du$ directement.

C.3) La fonction intégrée étant positive, la primitive $F_{x,y}$ est croissante sur $[0, +\infty[$.

Donc $F_{x,y}(t) \leq \lim_{+\infty} F_{x,y} = \Gamma(x+y)$.

C.4) Il faut utiliser le théorème de continuité des intégrales paramétrées.

On pose $g(u, a) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a)$, fonction continue en a , et on a la domination :

$\forall a \in [0, +\infty[, \forall u \in]0, +\infty[, |g(u, a)| \leq \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y) = \varphi(u)$ indépendant de a .

Et φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ directement par la relation obtenue au C.2).

D'où l'existence et la continuité de G .

C.5) On applique le théorème de convergence dominée (avec la même fonction de domination φ qu'à la question précédente). En toute rigueur, on doit considérer une suite arbitraire $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, et déduire du th de convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G(a_n) = \Gamma(x+y) \int_0^{+\infty} \varphi(u) du = \Gamma(x+y)\beta(x,y)$$

C.6) Il faut utiliser le théorème de dérivation des intégrales paramétrées.

Avec les notations de 4), on a $a \mapsto g(u, a)$ de classe C^1 , et $\frac{\partial g}{\partial a}(u, a) = u^{x-1}a^{x+y-1}e^{-(1+u)a}$.

On doit se placer sur un segment $[\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$.

On a $\forall a \in [\alpha, \beta], \forall u \in]0, +\infty[, 0 \leq \left| \frac{\partial g}{\partial a}(u, a) \right| \leq u^{x-1}\beta^{x+y-1}e^{-(1+u)\alpha} = \psi(u)$ en notant que $x+y \geq 1$.

Et ψ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car $\alpha > 0$.

C.7) Par C.6), $G'(a) = a^y e^{-a} \int_0^{+\infty} (ua)^{x-1} e^{-ua} du$.

Donc $G'(a) = e^{-a} a^{y-1} \Gamma(x)$ par A.2) (ou le changement de variable $v = ua$).

C.8) On a $G(0) = 0$, donc $\Gamma(x+y)\beta(x,y) = G(+\infty) = \int_0^{+\infty} G'(a) da = \int_0^{+\infty} e^{-a} a^{y-1} \Gamma(x) da = \Gamma(x)\Gamma(y)$.

Exercice

1) On pose $a_k = P(X = \vec{e}_k)$.

Par le th du transfert, $L_X(t) = E(\exp(t \langle X, \vec{v} \rangle)) = \sum_{k=1}^n a_k \exp(t \langle \vec{e}_k, \vec{v} \rangle)$.

Donc L_X est de classe C^∞ comme combinaison linéaire de fonctions de classe C^∞ .

On a $L_X^{(m)}(0) = \sum_{k=1}^n a_k \langle \vec{e}_k, \vec{v} \rangle^m$, donc en particulier $L_X(0) = 1$, $L_X'(0) = E(\langle X, \vec{v} \rangle)$.

Mais $E(\langle X, \vec{v} \rangle) = \sum_{k=1}^n a_k \langle \vec{e}_k, \vec{v} \rangle = \sum_{k=1}^n \langle a_k \vec{e}_k, \vec{v} \rangle = \langle E(X), \vec{v} \rangle = 0$. Donc $L_X'(0) = 0$.

2) a) On a $P(\langle S_n, \vec{v} \rangle \geq \lambda) \leq P(\exp(t \langle S_n, \vec{v} \rangle) \geq \exp(t\lambda))$, car $x \mapsto \exp(tx)$ est croissante.

Par Markov (la v.a. étant positive), on obtient $P(\langle S_n, \vec{v} \rangle \geq \lambda) \leq \frac{E(\exp(t \langle S_n, \vec{v} \rangle))}{\exp(t\lambda)}$.

On a $\exp(t \langle S_n, \vec{v} \rangle) = \prod_{k=1}^n \exp(t \langle X_k, \vec{v} \rangle)$, donc $E(\exp(t \langle S_n, \vec{v} \rangle)) = E(\exp(t \langle X, \vec{v} \rangle))^n = L_X(t)^n$.

Donc $P(\langle S_n, \vec{v} \rangle \geq \lambda) \leq \exp(n \ln L_X(t) - t\lambda)$.

b) On choisit t de sorte à minimiser $t \mapsto \frac{1}{2}nt^2 - t\lambda$, donc on prend $t = \frac{\lambda}{n}$, d'où le résultat.

c) On considère une base orthonormée $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d)$ de \mathbb{R}^d . On a alors $\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^d \langle S_n, \vec{v}_k \rangle^2$.

Lorsque $\|S_n\|^2 \geq \lambda^2$, il existe $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ tel que $\langle S_n, \vec{v}_k \rangle^2 \geq \frac{\lambda^2}{d}$.

Donc $(\|S_n\| \geq \lambda)$ est inclus dans la réunion des $(2d)$ événements $\langle S_n, \vec{v}_k \rangle \geq \frac{\lambda}{\sqrt{d}}$ et $\langle S_n, -\vec{v}_k \rangle \geq \frac{\lambda}{\sqrt{d}}$.

Or, pour tout \vec{v} de norme 1, $P\left(\langle S_n, \vec{v} \rangle \geq \frac{\lambda}{\sqrt{d}}\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{2n} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{d}}\right)^2\right) = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2nd}\right)$.

Donc $P(\|S_n\| \geq \lambda) \leq 2d \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2nd}\right)$.

3) On a $(\ln L_X)''(t) = \frac{L_X''(t)}{L_X(t)} - \left(\frac{L_X'(t)}{L_X(t)}\right)^2 \leq \frac{L_X''(t)}{L_X(t)} = \frac{E(\langle X, \vec{v} \rangle^2 \omega(t))}{E(\omega(t))}$, où $\omega(t) = \exp(t \langle X, \vec{v} \rangle)$.

Comme $\langle X, \vec{v} \rangle^2 \leq \|X\|^2 \|\vec{v}\|^2 = 1$, alors $(\ln L_X)''(t) \leq 1$.

Mais $(\ln L_X)''(0) = \ln 1 = 0$ et $(\ln L_X)'(0) = 0$. Donc par Taylor-Lagrange, $\forall t \geq 0, \ln L_X(t) \leq \frac{1}{2}t^2$.