

Révision n°5 bis. Corrigé

1) Posons $z = re^{i\theta}$, avec $r \in [0, 1[$. On a $\ln(|1 - z|^2) = \ln((1 - re^{i\theta})(1 - re^{-i\theta}))$.

Posons $f : [0, r] \rightarrow \mathbb{R} \quad \rho \mapsto \ln(|1 - \rho e^{i\theta}|^2) = \ln \varphi(\theta)$, où $\varphi(\theta) = (1 - \rho e^{i\theta})(1 - \rho e^{-i\theta})$.

(remarque : On rappelle qu'il n'y a pas de \ln dans \mathbb{C} , donc surtout ne pas séparer en deux \ln .)

Par dérivée logarithmique, $\forall \rho \in [0, r]$, $f'(\rho) = \frac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)} = - \left(\frac{e^{i\theta}}{1 - \rho e^{i\theta}} + \frac{e^{-i\theta}}{1 - \rho e^{-i\theta}} \right) = -2 \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\theta}}{1 - \rho e^{i\theta}} \right)$.

Comme $|\rho e^{i\theta}| < 1$, alors $\frac{e^{i\theta}}{1 - \rho e^{i\theta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n e^{(n+1)i\theta} = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^{n-1} e^{ni\theta}$.

La série entière $\rho \mapsto \sum_{n \geq 1} \rho^{n-1} e^{ni\theta}$ est de rayon de convergence 1.

On peut donc l'intégrer terme à terme (par convergence normale) sur le segment $[0, r] \subset [0, 1[$.

On a $f(0) = 0$. Donc $\ln(|1 - z|^2) = f(r) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} e^{ni\theta} = -2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} \right)$. D'où $\ln(|1 - z|) = -\operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} \right)$.

2) a) La fonction $\theta \mapsto |\lambda - e^{i\theta}|$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, donc l'intégrale n'est pas impropre.

b) On a $|\lambda - e^{i\theta}| = |1 - \lambda e^{-i\theta}| = -\operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-ni\theta}}{n} \right)$, car $|\lambda e^{-i\theta}| < 1$.

$\theta \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-ni\theta}}{n}$ converge normalement sur le segment $[0, 2\pi]$, car $\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \frac{\lambda^n e^{-ni\theta}}{n} \right| \leq |\lambda|^n$.

Donc par intégration terme à terme, on obtient $\int_0^{2\pi} \ln |\lambda - e^{i\theta}| d\theta = -\operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda^n e^{-ni\theta}}{n} d\theta \right)$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} d\theta = 0$, alors $J(\lambda) = \int_0^{2\pi} \ln |\lambda - e^{i\theta}| d\theta = 0$.

c) On a $\int_0^{2\pi} \ln |\lambda - e^{i\theta}| d\theta = \int_0^{2\pi} \ln |\lambda| d\theta + \int_0^{2\pi} \left| 1 - \frac{e^{i\theta}}{\lambda} \right| d\theta$.

Or, $\int_0^{2\pi} \ln \left| 1 - \frac{e^{i\theta}}{\lambda} \right| d\theta = \int_0^{2\pi} \ln \left| 1 - \frac{e^{-i\theta}}{\lambda} \right| d\theta = \int_0^{2\pi} \ln \left| e^{i\theta} - \frac{1}{\lambda} \right| d\theta = J \left(\frac{1}{\lambda} \right) = 0$ par b).

Donc $J(\lambda) = 2\pi \ln |\lambda|$.

3) a) On a $|\rho - e^{i\theta}|^2 = (\rho - \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 \geq (\sin \theta)^2$. Donc $|\rho - e^{i\theta}| \geq |\sin \theta|$.

b) On va utiliser le théorème de convergence dominée pour un paramètre continu :

- on a $\forall \theta \in]0, 2\pi[$, $\lim_{\rho \rightarrow 1, \rho < 1} \ln(|\rho - e^{i\theta}|) = \ln(|1 - e^{i\theta}|)$

- pour tout $\rho \in [0, 1]$ (avec 1 **inclus**), la fonction $\theta \mapsto \ln(|\rho - e^{i\theta}|)$ est continue sur $]0, 2\pi[$

- **domination** : On cherche φ intégrable telle que $\forall \rho \in [0, 1[$, $\forall \theta \in]0, 2\pi[$, $\ln(|\rho - e^{i\theta}|) \leq \varphi(\theta)$.

Pour $|\rho - e^{i\theta}| \leq 1$, on a $\ln(|\rho - e^{i\theta}|) \leq -\ln(|\sin \theta|)$, car $0 \leq |\sin \theta| \leq |\rho - e^{i\theta}| \leq 1$.

Pour $|\rho - e^{i\theta}| \geq 1$, on a $\ln(|\rho - e^{i\theta}|) \leq \ln 2$, car $1 \leq |\rho - e^{i\theta}| \leq 2$.

On peut donc prendre $\varphi(\theta) = \max(-\ln(|\sin \theta|), \ln 2)$.

Or, la fonction $\theta \mapsto -\ln(|\sin \theta|)$ est intégrable car en 0^+ , $-\ln(|\sin \theta|) = -\ln(\theta) + o(1) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}\right)$.

De même en $2\pi^-$, car $-\ln(|\sin(2\pi - \theta)|) = -\ln(|\sin \theta|)$. Donc φ est bien **intégrable**.

On en déduit par convergence dominée que $\theta \mapsto \ln(|1 - e^{i\theta}|)$ est intégrable sur $]0, 2\pi[$, et que

$$J(1) = \lim_{\rho \rightarrow 1, \rho < 1} J(\rho), \quad \text{donc } J(1) = 0$$

c) Posons $\lambda = e^{i\varphi}$. On a $J(e^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} \ln(|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|) d\theta = \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \ln(|e^{i\varphi} - e^{i(\theta+\varphi)}|) d\theta = \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \ln(|1 - e^{i\theta}|) d\theta$.

Comme $\theta \mapsto \ln(|1 - e^{i\theta}|)$ est 2π -périodique, alors $\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \ln(|1 - e^{i\theta}|) d\theta = \int_0^{2\pi} \ln(|1 - e^{i\theta}|) d\theta = J(1)$.

Remarque : La fonction $\theta \mapsto \ln(|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|)$ est continue sur $[0, \varphi[\cup]\varphi, 2\pi]$ et

on dit ici un peu abusivement qu'elle est intégrable sur le segment $[0, 2\pi]$.

Dans l'énoncé de l'X, cette terminologie était détaillée en préambule.

4) On a $\ln |P(e^{i\theta})| = \ln |\alpha| + \sum_{k=1}^d \ln(|\lambda_k - e^{i\theta}|)$.

Donc $\theta \mapsto \ln |P(e^{i\theta})|$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$ comme somme de fonction intégrables (au sens du 3) c)).

Et $\int_0^{2\pi} \ln |P(e^{i\theta})| d\theta = 2\pi (\ln |\alpha| + \sum_{z \in \Delta} \ln(|\lambda_k|))$, où $\Delta = \{k \in \llbracket 1, p \rrbracket \mid |z_k| < 1\}$.