Révision n°5 bis. *Durée 1h20mn, extrait de X PC 2021*

1) Montrer que pour tout nombre complexe $|z| < 1$,

$$\ln(|1-z|) = -\operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\right)$$

Indication : Poser $z = re^{i\theta}$, et étudier la fonction $f : [0,r] \to \mathbb{R} \quad \rho \longmapsto \ln((1-\rho e^{i\theta})(1-\rho e^{-i\theta}))$.

2) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $\boxed{J(\lambda) = \int_0^{2\pi} \ln\left|\lambda - e^{i\theta}\right| \, d\theta}$.

a) On suppose $|\lambda| \neq 1$. Montrer que $J(\lambda)$ est bien définie (dans $\mathbb{R}$).

b) On suppose $|\lambda| < 1$. Montrer que $J(\lambda) = 0$.

c) On suppose $|\lambda| > 1$. Montrer que $J(\lambda) = 2\pi \ln(|\lambda|)$.

3) a) Soit $\rho \in [0,1]$. Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\left|\rho - e^{i\theta}\right| \geq |\sin\theta|$.

b) Montrer que $J(1) = 0$.

Indication : Considérer $\rho \longmapsto J(\rho)$ définie sur $[0,1[$.

c) On suppose $|\lambda| = 1$. Montrer que $J(\lambda) = 0$.

4) Soit $P(X) = \alpha \prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k) \in \mathbb{C}[X]$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$. On pose $\Delta = \{k \in [\![1,d]\!],\ |\lambda_k| > 1\}$.

Justifier que $M(P) = \int_0^{2\pi} \ln\left|P(e^{i\theta})\right| \, d\theta$ est bien définie et calculer sa valeur.